

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Кафедра вычислительной математики

**А. В. Войтишек**

**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ  
МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО**

Учебное пособие

Новосибирск  
2007

ББК 22.19  
УДК 519.245  
В 654

**Войтишек А. В.** Функциональные оценки метода Монте-Карло:  
Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2007. 76 с.

ISBN 978-5-94356-539-7

Данное пособие содержит конспективное изложение лекций специального курса «Функциональные оценки метода Монте-Карло», который в течение десяти лет читается автором для студентов старших курсов механико-математического факультета НГУ. Работа над пособием выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 06-01-00046а, 07-01-00024а), Программы № 14 Президиума РАН, Президентской программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-4774.2006.1).

Все замечания и предложения читателей по содержанию данной работы будут приняты автором с благодарностью (контактный телефон (8-383)-330-07-28; e-mail: vav@osmf.sccc.ru).

Рецензент  
чл.-корр. РАН Г. А. Михайлов

© Новосибирский государственный университет, 2007  
© Войтишек А. В., 2007

ISBN 978-5-94356-539-7

## ПРЕДИСЛОВИЕ

С развитием вычислительной техники возрастает интерес к численным методам решения прикладных задач, в частности к статистическому моделированию (или методу Монте-Карло) [1–23]. Исторически интенсивное развитие теории и приложений метода Монте-Карло было связано с решением актуальных задач теории переноса излучения в пятидесятых годах двадцатого столетия. За последние полвека сфера применимости методов численного статистического моделирования значительно расширилась. Разработана теория вероятностных представлений решений задач математической физики, на основе которой построены соответствующие численные стохастические оценки. Эффективные алгоритмы разработаны также в статистической физике (метод Метрополиса, схема Изинга), в физической и химической кинетике (многочастичные задачи, решение уравнений Больцмана и Смолуховского, моделирование реакций и фазовых переходов), в теории массового обслуживания, в финансовой математике, в теории турбулентности, в математической биологии и др.

Традиционно методы Монте-Карло рассматриваются в качестве альтернативных «детерминированным» численным методам (в частности, конечно-разностным и конечно-элементным схемам). Однако во многих случаях эффективными оказываются смешанные алгоритмы, содержащие в себе элементы детерминированных и стохастических численных схем. Такие комбинированные алгоритмы можно назвать *дискретно-стохастическими численными методами*.

Следует сразу отметить, что спектр дискретно-стохастических численных методов достаточно широк. Комбинированные алгоритмы возникают во всех основных разделах теории методов Монте-Карло, к которым следует отнести: численное моделирование случайных величин, векторов и функций; вычисление многократных интегралов; приближение интегралов, зависящих от параметра; решение интегральных уравнений второго рода; приложения методов Монте-Карло к задачам вычислительной математики и математической физики.

В данном курсе представлена развитая в последние два десятилетия (в основном в отделе статистического моделирования в физике ИВМиМГ СО РАН) теория приближения функций, заданных в интегральной форме (см. [14–23]; в этих же работах описаны основные приложения соответствующих численных алгоритмов). Основными объектами изучения являются: интеграл, зависящий от параметра, и реше-

ние интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Дискретно-стохастический алгоритм приближения таких функций включает введение сетки по параметру, оценку значений функции в узлах методом Монте-Карло и восполнение решения по полученным значениям в узлах с использованием аппроксимационного базиса. Соответствующий базис должен обладать хорошими свойствами устойчивости. В данном курсе используется «абсолютно устойчивое» мультилинейное приближение.

При изучении сходимости дискретно-стохастических численных алгоритмов приближения функций важным является вопрос о выборе функциональной меры и вероятностного смысла сходимости к нулю погрешности метода. Следуя традициям классического численного анализа, в данном курсе мы использовали  $L_2$ - и  $C$ -метрику для погрешности и сходимости в среднем и по вероятности соответственно. Для этих подходов к оценке погрешности удается разложить погрешность на «детерминированную» и «стохастическую» компоненты, первая из которых оценивается сверху с помощью соответствующих аппроксимационных теорем, а вторая сводится к оценке максимума случайных погрешностей в узлах сетки.

Далее следует учесть, какие стохастические оценки метода Монте-Карло (независимые, зависимые, слабо зависимые и т. д.) используются в узлах сетки. Для независимых оценок при построении верхней границы для максимума случайных погрешностей в узлах сетки используется теория порядковых статистик. Для оценок по методу зависимых испытаний требуется использование специальной теории слабой (функциональной) сходимости последовательностей случайных функций. В курсе сформулированы основные результаты этой теории. Представлен еще один (помимо обоснования метода зависимых испытаний) пример использования этой теории – исследование слабой сходимости численных спектральных моделей однородных случайных полей. В связи с этим в курсе формулируются основные результаты корреляционной теории однородных случайных полей. Кратко описаны возможности использования спектральных моделей и более подробно представлен относительно новый пример такого использования – тестирование алгоритмов численного (в том числе параметрического) интегрирования.

Для изучения данного специального курса желательно предварительно освоить курс «Основы методов Монте-Карло» (хотя бы на уровне пособия [23]). Такие курсы читаются: на втором потоке 4-го курса механико-математического факультета и в магистратуре (5-й курс) физического факультета НГУ.

# ГЛАВА 1. ДИСКРЕТНО-СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

## 1.1. Дискретно-стохастические методы оценки функций

**1.1.1. Функциональные алгоритмы метода Монте-Карло.** Напомним, что «обычные» («стандартные», «скалярные») методы Монте-Карло связаны с вычислением некоторой (неслучайной) величины  $I$ , которую удастся записать в виде математического ожидания  $\mathbf{E}\zeta$  случайной величины  $\zeta$  с конечной дисперсией  $\mathbf{D}\zeta$ , причем выборочные значения  $\zeta_j$  достаточно просто реализуются на компьютере. Построив большое количество  $n$  выборочных значений  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ , на основе закона больших чисел получаем приближение искомой величины:

$$I = \mathbf{E}\zeta \approx \bar{\zeta}_n = \frac{\zeta_1 + \dots + \zeta_n}{n}. \quad (1.1.1)$$

В курсах по методам Монте-Карло (см., например, [16, 23]) изучаются два основных примера величин (1.1.1). Первый пример – это интеграл  $I_1 = \int_Y g(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$ ,  $Y \subseteq R^s$ , который представляется в виде

$$I_1 = \int_Y \frac{g(\mathbf{x}')}{f(\mathbf{x}')} f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \mathbf{E}\zeta \approx \frac{1}{n} \left( \frac{g(\xi_1)}{f(\xi_1)} + \dots + \frac{g(\xi_n)}{f(\xi_n)} \right), \quad (1.1.2)$$

при этом  $\zeta = g(\xi)/f(\xi)$ , а случайный вектор  $\xi$  распределен в  $Y$  согласно плотности  $f(\mathbf{x}')$ .

Второй пример – это линейный функционал

$$I_2 = (\varphi_2, \hat{h}) = \int_X \varphi_2(x') \hat{h}(x') dx' \quad (1.1.3)$$

от решения  $\varphi_2$  интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi_2(x) = \int_X \hat{k}(x', x) \varphi_2(x') dx' + \hat{f}(x) \quad \text{или} \quad \varphi_2 = K \varphi_2 + \hat{f}. \quad (1.1.4)$$

Можно показать, что справедливо представление

$$I_2 = \mathbf{E}\xi, \quad \text{где} \quad \xi = \sum_{m=0}^N Q_m \hat{h}(x_m) - \quad (1.1.5)$$

оценка по столкновениям. В соотношении (1.1.5)  $x_0, x_1, \dots, x_N$  обозначает однородную цепь Маркова, обрывающуюся с вероятностью единица в состоянии  $x_N$  со случайным номером  $N$  и имеющую начальную плотность  $\pi(x)$  и переходную функцию  $p(x', x) = r(x', x)(1 - p_a(x'))$  (здесь  $p_a(x')$  – вероятность обрыва цепи в точке  $x'$ ); случайные веса  $Q_m$  определяются рекуррентно:

$$Q_0 = \frac{\hat{f}(x_0)}{\pi(x_0)}, \quad Q_m = Q_{m-1} \frac{\hat{k}(x_{m-1}, x_m)}{p(x_{m-1}, x_m)}. \quad (1.1.6)$$

В данном специальном курсе будут рассмотрены алгоритмы приближения функций  $\varphi(\mathbf{x})$  (здесь  $\mathbf{x} \in X$ , где  $X$  – «простая» ограниченная область в  $R^l$ ), представленных в интегральной форме (т. е. речь по сути идет о континууме величин типа (1.1.1)). Здесь возникают специфические трудности, связанные как с исследованием сходимости и оптимизации алгоритмов, так и с различными стратегиями приближения функций  $\varphi$  методом Монте-Карло. В ряде случаев удается построить случайную функцию  $\zeta(\mathbf{x})$  такую, что  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\zeta(\mathbf{x})$ , и по аналогии с (1.1.1) строить приближение:

$$\varphi(\mathbf{x}) \approx \bar{\zeta}_n(\mathbf{x}) = \frac{\zeta_1(\mathbf{x}) + \dots + \zeta_n(\mathbf{x})}{n}. \quad (1.1.7)$$

Так, в частности, устроен изучаемый в этом курсе метод зависимых испытаний (см. далее разд. 1.6). При изучении погрешности метода (1.1.7) требуется применять теорию функциональной сходимости последовательностей случайных полей (см. далее разд. 2.1–2.6).

Однако более реальной и чаще встречающейся на практике является ситуация, в которой удается приближенно вычислить значения  $\{\varphi(\mathbf{x}_i)\}$  методом Монте-Карло (здесь  $\{\mathbf{x}_i\}$  – сетка на компактном множестве  $X$ ), а подсчет функции  $\varphi$  в остальных точках  $\mathbf{x} \in X$  реализуется с помощью восполнения с использованием какого-либо аппроксимационного базиса. Такие «практические» алгоритмы будут изучены нами в гл. 1.

**1.1.2. Основные примеры приближаемых функций.** По аналогии со «скалярными» оценками (1.1.2) и (1.1.5) рассмотрим следующие функции.

1. Интеграл, зависящий от параметра

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \int_Y g(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad \mathbf{x} \in X \subset R^l, \quad Y \subseteq R^s. \quad (1.1.8)$$

2. Решение  $\varphi_2(x)$  интегрального уравнения (1.1.4).

Заметим, что, несмотря на имеющееся различие, между функциями  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  может быть установлена следующая аналогия. Решение уравнения (1.1.4) представимо в виде ряда Неймана:

$$\varphi_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} K^m \hat{f}(x), \quad (1.1.9)$$

который в связи с соотношением

$$K^m \hat{f}(x) = \int_X \dots \int_X \hat{f}(x_0) \hat{k}(x_0, x_1) \dots \hat{k}(x_{m-1}, x) dx_0 dx_1 \dots dx_{m-1}$$

является суммой интегралов, зависящих от параметра, бесконечно возрастающей кратности.

В дальнейших рассуждениях достаточно часто формулируются утверждения, справедливые одновременно для функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . В этом случае мы будем использовать обозначение  $\varphi$  без индекса.

**1.1.3. Дискретно-стохастические методы (Д-СЧМ) оценки функции в целом.** Рассмотрим приближение функции  $\varphi(\mathbf{x})$  вида

$$\varphi(\mathbf{x}) \approx L_M \varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M w_i(\varphi) \chi_i(\mathbf{x}). \quad (1.1.10)$$

В формуле (1.1.10)  $L_M \varphi(\mathbf{x})$  обозначает аппроксимацию функции  $\varphi(\mathbf{x})$  на сетке  $X^{(M)} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\}$ , где  $\Xi^{(M)} = \{\chi_1(\mathbf{x}), \dots, \chi_M(\mathbf{x})\}$  – базисные функции, а коэффициенты  $W^{(M)} = \{w_1(\varphi), \dots, w_M(\varphi)\}$  являются комбинациями значений  $\varphi = (\varphi(\mathbf{x}_1), \dots, \varphi(\mathbf{x}_M))$ . Базис  $\Xi^{(M)}$  и коэффициенты выбираются таким образом, что функция  $\varphi(\mathbf{x})$  близка к функции  $L_M \varphi(\mathbf{x})$  в некоторой функциональной норме и аппроксимация (1.1.10) устойчива. Такие свойства обеспечивает аппроксимация Стрэнга–Фикса (см. далее разд. 1.3, 1.4).

Основным в дальнейшем будет считаться случай (см. разд. 1.3)

$$w_i(\varphi) = \varphi(\mathbf{x}_i). \quad (1.1.11)$$

**АЛГОРИТМ 1.1.1.** *Приближенно вычисляем значения  $\{\varphi(\mathbf{x}_i)\}$ , используя алгоритмы метода Монте-Карло с числами реализаций  $\{n_i\}$ :*

$$\varphi(\mathbf{x}_i) \approx Z_{n_i}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \zeta_j^{(i)}. \quad (1.1.12)$$

Строим приближение функции  $\varphi(\mathbf{x})$ :

$$\varphi(\mathbf{x}) \approx L_M \tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M Z_{n_i}(\mathbf{x}_i) \chi_i(\mathbf{x}). \quad (1.1.13)$$

В качестве случайных величин  $\zeta^{(i)}$  из (1.1.12) используют несмещенные и асимптотически несмещенные, зависимые, независимые и слабо зависимые оценки метода Монте-Карло (см. далее разд. 1.5–1.7).

**1.1.4. Параметры Д-СЧМ.** Параметрами алгоритма 1.1.1 являются: количество  $M$  узлов сетки  $X^{(M)}$  и числа испытаний  $\{n_i\}$  в узлах сетки. Обозначим  $\bar{n} = \min(n_1, \dots, n_M)$ . Ясно, что при малом  $M$  и большом  $\bar{n}$  погрешность алгоритма 1.1.1 может оказаться значительной (ведь шаг сетки  $X^{(M)}$  – достаточно большой). Наоборот, при большом  $M$  и малом  $\bar{n}$  погрешность также может быть немалой даже при хороших свойствах устойчивости приближения (1.1.10). Таким образом, нужны рекомендации по согласованному выбору параметров  $M$  и  $\bar{n}$ . Такие рекомендации сформулированы далее в разд. 1.12.

Отметим также, что при построении алгоритма 1.1.1 имеется возможность специальным образом выбирать плотности вероятностных распределений, определяющих оценки  $\{\zeta^{(i)}\}$ . Предложения по выбору таких плотностей для метода зависимых испытаний (для обеих функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ) содержатся в работах [24, 25] (см. также подразд. 1.12.3).

## 1.2. $L_2$ - и $C$ -подходы к оценке погрешности Д-СЧМ

**1.2.1. Вероятностные подходы к оценке погрешностей дискретно-стохастических методов.  $L_2$ -подход и  $C$ -подход.** При изучении погрешности  $\delta^{(B)} = \rho_B(\varphi, L_M \tilde{\varphi})$  алгоритма 1.1.1 возникают проблемы выбора соответствующего нормированного функционального пространства  $B$ , а также вероятностного смысла стремления случайной величины  $\delta^{(B)}$  к нулю с ростом параметров  $M$  и  $\bar{n}$ . Следуя канонам классического численного анализа (см., например, [26]), в качестве пространств  $B$  рассмотрим  $L_2(X)$  и  $C(X)$ .

Для хорошо разработанного (см., например, [14–16, 21, 22])  $L_2$ -подхода выбирается сходимость в среднем погрешности  $\delta^{(L_2)}$  к нулю и строится



оценки сверху  $T^{(L_2)}(M, \bar{n})$  такие, что

$$\left(\mathbf{E}\delta^{(L_2)}\right)^2 = \left(\mathbf{E}\left(\int_X (\varphi(\mathbf{x}) - L_M\tilde{\varphi}(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2}\right)^2 < T^{(L_2)}(M, \bar{n}), \quad (1.2.1)$$

где  $T^{(L_2)}(M, \bar{n}) \rightarrow 0$  при  $M, \bar{n} \rightarrow \infty$ .

Для  $C$ -подхода [21, 22] величина  $\delta^{(C)} = \sup_{\mathbf{x} \in X} |\varphi(\mathbf{x}) - L_M\tilde{\varphi}(\mathbf{x})|$  ограничивается сверху по вероятности:

$$\mathbf{P}\left(\delta^{(C)} < T^{(C)}(M, \bar{n})\right) > 1 - \varepsilon \quad (1.2.2)$$

для некоторого достаточно малого  $\varepsilon > 0$ .

Отметим, что для  $L_2$ -подхода используется относительно «слабая» интегральная метрика  $\rho_{L_2}$  пространства  $L_2(X)$  и «сильная» вероятностная сходимость погрешности к нулю (в среднем). В свою очередь в  $C$ -подходе для «жесткой» метрики  $\rho_C$  используется относительно «слабая» сходимость (по вероятности).

**1.2.2. Дискретная и стохастическая компоненты погрешности.** В каждом из рассматриваемых подходов удается разбить погрешность на два слагаемых. Для  $L_2$ -подхода, в частности в силу неравенства Коши–Буняковского и теоремы Фубини (о перестановке операций интегрирования и взятия математического ожидания), имеем:

$$\left(\mathbf{E}\delta^{(L_2)}\right)^2 \leq \mathbf{E}\left(\int (\varphi(\mathbf{x}) - L_M\tilde{\varphi}(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}\right) \mathbf{E}1^2 = \int \mathbf{E}(\varphi(\mathbf{x}) - L_M\tilde{\varphi}(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}.$$

Далее полагаем, что в узлах сетки  $X^{(M)}$  используются несмещенные оценки:  $\mathbf{E}\zeta^{(i)} = \varphi(\mathbf{x}_i)$ . В этом случае  $\mathbf{E}L_M\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = L_M\varphi(\mathbf{x})$  (см. соотношение (1.1.10)). Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\varphi(\mathbf{x}) - L_M\tilde{\varphi}(\mathbf{x}))^2 &= (\varphi(\mathbf{x}) - L_M\varphi(\mathbf{x}))^2 + \mathbf{D}L_M\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) \quad \text{и} \\ \left(\mathbf{E}\delta^{(L_2)}\right)^2 &\leq \left(\delta_1^{(L_2)}\right)^2 + \delta_2^{(L_2)}; \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

$$\delta_1^{(L_2)} = \left(\int_X (\varphi(\mathbf{x}) - L_M\varphi(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2}, \quad \delta_2^{(L_2)} = \int_X \mathbf{D}L_M\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Для  $C$ -подхода, согласно неравенству треугольника, имеем:

$$\delta^{(C)} \leq \rho_C(\varphi, L_M\varphi) + \rho_C(L_M\varphi, L_M\tilde{\varphi}) = \delta_1^{(C)} + \delta_2^{(C)}. \quad (1.2.4)$$

Первые слагаемые  $\delta_1^{(L_2)}$  и  $\delta_1^{(C)}$  из соотношений (1.2.3), (1.2.4) являются неслучайными (детерминированными) и оцениваются сверху на основании аппроксимационных свойств базиса  $\Xi^{(M)}$  (см. далее разд. 1.3).

Вторые (стохастические) слагаемые  $\delta_2^{(L_2)}$  и  $\delta_2^{(C)}$  из соотношений (1.2.3), (1.2.4) оцениваются сверху на основании свойств устойчивости базиса  $\Xi^{(M)}$  (см. далее разд. 1.4) и соответствующих предельных теорем теории вероятностей. Здесь важным является то, какие оценки  $\{\zeta^{(i)}\}$  в узлах  $\{\mathbf{x}_i\}$  используются (см. далее разд. 1.5–1.10). Отметим также, что в разд. 1.7 рассматривается случай смещенных оценок  $\{\zeta^{(i)}\}$ , для которых  $\mathbf{E}\zeta^{(i)} \neq \varphi(\mathbf{x}_i)$ .

### 1.3. Оценка детерминированной компоненты погрешности

**1.3.1. Использование аппроксимации Стренга–Фикса.** В качестве приближения  $L_M\varphi(\mathbf{x})$  целесообразно использовать *аппроксимацию Стренга–Фикса* (особенно важным здесь является свойство устойчивости этого приближения – см. далее разд. 1.4), которая строится следующим образом [27, 28].

Для простоты возьмем в качестве  $X$  прямоугольный параллелепипед

$$\{\mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(l)}) \in R^l \mid a_k \leq x^{(k)} \leq b_k, \quad k = 1, \dots, l\}. \quad (1.3.1)$$

Предположим, что в  $R^l$  задана равномерная прямоугольная сетка и каждому узлу  $\mathbf{x}_i$  из  $X^{(M)}$  (т. е. узлу, попавшему в область (1.3.1)) можно сопоставить мультииндекс  $\bar{j}_{(i)} = (j_{(i)}^{(1)}, \dots, j_{(i)}^{(l)})$  (здесь  $j_{(i)}^{(s)}$  – целые числа) так, что  $\mathbf{x}_i = (j_{(i)}^{(1)}h, \dots, j_{(i)}^{(l)}h)$ , где  $h$  – шаг сетки. Заметим, что величина  $h$  пропорциональна  $1/M^{1/l}$ . Аппроксимация Стренга–Фикса определяется базисом

$$\chi_i(\mathbf{x}) = \chi_{(j_{(i)}^{(1)} \dots j_{(i)}^{(l)})}(x^{(1)}, \dots, x^{(l)}) = \chi_{j_{(i)}^{(1)}}(x^{(1)}) \times \dots \times \chi_{j_{(i)}^{(l)}}(x^{(l)}), \quad (1.3.2)$$

где  $\chi_{j_{(i)}^{(m)}}(x^{(m)}) = \chi(x^{(m)}/h - j_{(i)}^{(m)})$ , а  $\chi(x)$  – финитная, одинаковая для всех координат, *производящая функция*.

Как правило, в качестве производящей функции выбирают *B-сплайны*  $\beta^{(r)}(x)$  *порядка*  $r$ , которые определяются следующим образом (см., например, [28]):  $\beta^{(r)}(x) = \beta^{(0)} * \beta^{(r-1)}(x)$ , где

$$\beta^{(0)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -1/2 \leq x < 1/2; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1.3.3)$$

а знак «\*» обозначает свертку:  $g_1 * g_2(x) = \int g_1(y) g_2(x-y) dy$ . Несложно понять, что  $B$ -сплайны представляют собой кусочно-полиномиальные функции  $r$ -й степени, причем для нечетных  $r$  соответствующие узлы являются целыми точками, симметрично расположенными около нуля. При этом нормировка  $x^{(m)}/h - j_{(i)}^{(m)} = (x^{(m)} - j_{(i)}^{(m)}h)/h$  из (1.3.2) устанавливает отношение между этими целыми точками и узлами, соседними с  $\mathbf{x}_i$  вдоль  $m$ -й координатной оси.

Как правило, в качестве производящей функции используется сплайн первого порядка (или «функция-крышка»):

$$\chi(x) = \beta^{(1)}(x) = \begin{cases} 1+x & \text{для } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{для } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \quad (1.3.4)$$

в этом случае приближение  $L_M \varphi(\mathbf{x})$  из (1.1.10) называется *мультилинейной аппроксимацией* функции  $\varphi(\mathbf{x})$ . Следующее утверждение отражает аппроксимационные свойства приближения (1.1.10) с базисом (1.3.2).

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3.1** [28]. Пусть  $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{p+1}(X)$  и  $\chi(x) \in C^p(R)$ , тогда найдутся такие коэффициенты  $w_m(\varphi)$  в (1.1.10), что справедлива оценка

$$\rho_{C^s(X)}(\varphi, L_M \varphi) \leq H_s h^{p+1-s} \|\varphi\|_{C^{p+1}(X)}, \quad 0 \leq s \leq p,$$

где константы  $H_s$  не зависят от  $\varphi(\mathbf{x})$  и  $h$ .

Заметим, что в [28] сформулировано также « $L_2$ -обобщение» утверждения 1.3.1, в котором пространство  $C^p(X)$  заменяется на соболевское пространство  $W_2^p(X)$  с метрикой

$$\rho_{W_2^p}(g_1, g_2) = \left( \sum_{m: |m| \leq p} \int_X [D^m (g_1(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x}))]^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2},$$

здесь

$$D^m g(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|m|}}{\partial (x^{(1)})^{m_1} \dots \partial (x^{(l)})^{m_l}} g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(l)}),$$

где  $m = (m_1, \dots, m_l)$ ,  $m_i$  – целые неотрицательные числа,  $|m| = m_1 + \dots + m_l$ .

**1.3.2. Верхние границы для детерминированных компонент погрешностей Д-СЧМ.** Заметим, что

$$\delta_1^{(L_2)} = \rho_{L_2}(\varphi, L_M\varphi) = \rho_{W_2^0}(\varphi, L_M\varphi),$$

т. е. для оценки этой величины можно использовать обобщенный аналог утверждения 1.3.1 для  $s = 0$ . Так, для образующей функции (1.3.4), принадлежащей пространству  $W_2^1(X)$ , и для  $\varphi \in W_2^2(X)$  справедлива оценка

$$\delta_1^{(L_2)} \leq \bar{H}_1 h^2; \quad \bar{H}_1 = H_0^{(L_2)} \|\varphi\|_{W_2^2(X)}. \quad (1.3.5)$$

Особо важным здесь является то, что оптимальный порядок сходимости в этом случае дают простейшие коэффициенты  $w_i(\varphi) = \varphi(\mathbf{x}_i)$  из (1.1.11). Аналогично

$$\delta_1^{(C)} = \rho_C(\varphi, L_M\varphi) = \rho_{C^0}(\varphi, L_M\varphi),$$

однако здесь попытка применить утверждение 1.3.1 наталкивается на то обстоятельство, что образующая функция (1.3.4), имеющая разрыв производной в нуле, формально принадлежит пространству  $C^0(X)$  и у  $\delta_1^{(C)}$  получается первый порядок по  $h$ . Отметим, однако, что в работе [29] доказано, что для случая  $\chi = \beta^{(1)}$ ,  $g \in C^2(X)$  справедливо неравенство:

$$\delta_1^{(C)} \leq \bar{H}_2 h^2, \quad \bar{H}_2 = \frac{1}{8} \sum_{s=1}^l \sup_{\mathbf{x} \in X} \left| \frac{\partial^2}{\partial (x^{(s)})^2} \varphi(\mathbf{x}) \right|. \quad (1.3.6)$$

И здесь этот оптимальный порядок сходимости дают простейшие коэффициенты (1.1.11).

**1.3.3. Особенности использования гладких восполнений.** Как указано в предыдущем подразделе, в случае использования в качестве производящей функции  $\chi(x) = \beta^{(r)}$  с  $r = 1$  оптимальный – второй – порядок (в смысле утверждения 1.3.1 и его обобщенного аналога) величин  $\delta_1^{(L_2)}$ ,  $\delta_1^{(C)}$  дают коэффициенты  $w_i(\varphi) = \varphi(\mathbf{x}_i)$  из (1.1.11). В случае  $r > 1$  выбор подходящих коэффициентов  $\{w_m(\varphi)\}$  в (1.1.10) более сложен. Существуют алгоритмы построения интерполирующей сплайн-функции, т. е. сплайна, проходящего через значения функции в узлах. Однако в многомерном случае, в отличие от мультилинейной аппроксимации, весьма непросто получить явные формулы для вычисления коэффициентов интерполирующей сплайн-функции. Это затрудняет реализацию таких алгоритмов на ЭВМ и, кроме того, ухудшает свойства устойчивости соответствующего приближения (1.1.10) (см. разд. 1.4).

Отметим, что в работе [29] получены коэффициенты  $w_i(\varphi)$ , обеспечивающие оптимальный – четвертый – порядок (в смысле утверждения 1.3.1 и его обобщенного аналога) величин  $\delta_1^{(L^2)}$ ,  $\delta_1^{(C)}$  для  $\varphi \in C^4(X)$  и для образующей функции  $\chi(x)$  вида

$$\beta^{(3)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 2; \\ (2-x)^3/6 & \text{при } 1 \leq x \leq 2; \\ (1+3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3)/6 & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ \beta^{(3)}(-x) & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (1.3.7)$$

#### 1.4. Устойчивость аппроксимации Стренга–Фикса

**1.4.1. Разложение единицы.** Для обоснования устойчивости аппроксимации Стренга–Фикса (1.1.10), (1.3.2) важную роль играет следующее

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4.1.** *Базис  $\{\chi_i(\mathbf{x})\}$  из (1.3.2) с производящей функцией  $\chi(x) = \beta^{(r)}(x)$  является разложением единицы, т. е.  $\sum_i \chi_i(\mathbf{x}) \equiv 1$  для всех  $\mathbf{x} \in R^l$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Используем метод математической индукции по размерности  $l$  пространства  $R^l$ .

Для  $l = 1$  утверждение доказываем индукцией по порядку  $r$  сплайна  $\beta^{(r)}$ . Пусть  $r = 0$  и  $x \in R$ . Найдется единственное целое число  $\hat{i}$  такое, что  $\hat{i}h - h/2 \leq x < \hat{i}h + h/2$ . Тогда  $\sum_i \beta^{(0)}(x/h - i) \equiv 1$  (см. соотношение (1.3.3)), т. к. в этой сумме все слагаемые равны нулю, кроме  $\hat{i}$ -го, которое равно единице.

Пусть теперь

$$\sum_i \beta^{(r-1)}\left(\frac{x}{h} - i\right) \equiv 1 \quad (1.4.1)$$

для всех  $x \in R$ . Тогда, согласно определению  $B$ -сплайна (см. подразд. 1.3.1), имеем

$$\begin{aligned} \sum_i \beta^{(r)}\left(\frac{x}{h} - i\right) &= \sum_i \int_{-\infty}^{+\infty} \beta^{(0)}(y) \beta^{(r-1)}\left(\frac{x - ih}{h} - y\right) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \beta^{(0)}(y) \sum_i \beta^{(r-1)}\left(\frac{x - ih}{h} - y\right) dy = \end{aligned}$$

$$= \int_{-1/2}^{+1/2} \sum_i \beta^{(r-1)} \left( \frac{(x - hy) - ih}{h} \right) dy.$$

Используя соотношение (1.4.1) для  $(x - hy)$  вместо  $x$ , получаем  $\sum_i \beta^{(r)}(x/h - i) \equiv 1$ , т. е. утверждение 1.4.1 верно для  $l = 1$ .

Наконец, индуктивный переход по  $l$  следует из соотношения

$$\begin{aligned} \sum_i \chi_i(\mathbf{x}) &= \sum_{j_{(i)}^{(1)}, \dots, j_{(i)}^{(l)}} \chi_{(j_{(i)}^{(1)}, \dots, j_{(i)}^{(l)})} (x^{(1)}, \dots, x^{(l)}) = \\ &= \sum_{j_{(i)}^{(1)}, \dots, j_{(i)}^{(l-1)}} \chi_{(j_{(i)}^{(1)}, \dots, j_{(i)}^{(l-1)})} (x^{(1)}, \dots, x^{(l-1)}) \times \sum_{j_{(i)}^{(l)}} \beta^{(r)} \left( \frac{x^{(l)}}{h} - j_{(i)}^{(l)} \right). \end{aligned}$$

Утверждение 1.4.1 доказано.

**1.4.2. «Снос погрешности в узлы» в метрике  $C$ .** Для приближения (1.1.10) с простейшими коэффициентами (1.1.11) с помощью утверждения 1.4.1 несложно свести оценку стохастической компоненты погрешности  $\delta_2^{(C)}$  к оценке максимума погрешностей приближений  $Z_{n_i}(\mathbf{x}_i)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \delta_2^{(C)} &= \sup_{\mathbf{x} \in X} |L_M \tilde{\varphi}(\mathbf{x}) - L_M \varphi(\mathbf{x})| = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left| \sum_{i=1}^M (Z_{n_i}(\mathbf{x}_i) - \varphi(\mathbf{x}_i)) \chi_i(\mathbf{x}) \right| \leq \\ &\leq \max_{i=1, \dots, M} |Z_{n_i}(\mathbf{x}_i) - \varphi(\mathbf{x}_i)| \times \sup_{\mathbf{x} \in X} \sum_i \chi_i(\mathbf{x}) = \max_{i=1, \dots, M} |Z_{n_i}(\mathbf{x}_i) - \varphi(\mathbf{x}_i)|. \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Соотношение (1.4.2) означает, что мультилинейная аппроксимация (1.1.10), (1.3.2), (1.3.4) с коэффициентами (1.1.11) обладает по сути идеальным свойством устойчивости, т. е. *константа Лебега  $L$*  в соотношении

$$\rho^{(C)}(L_M \tilde{\varphi}, L_M \varphi) \leq L \max_{i=1, \dots, M} |Z_{n_i}(\mathbf{x}_i) - \varphi(\mathbf{x}_i)| \tag{1.4.3}$$

минимальна (равна единице). Для аппроксимации Стренга–Фикса (1.1.10), (1.3.2) с кубической производящей функцией (1.3.7) в [29] для специального вида коэффициентов  $\{w_m(\varphi)\}$ , дающих оптимальный порядок сходимости величин  $\delta_1^{(C)}$  и  $\delta_1^{(L_2)}$ , получено  $L = 3$  (что тоже неплохо). А вот, например, для интерполяции Лагранжа константа Лебега растет с увеличением числа узлов равномерной сетки как  $2^M$  [30].

**1.4.3. «Снос погрешности в узлы» в метрике  $L_2$ .** Докажем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4.2. Для мультилинейной аппроксимации (1.1.10), (1.3.2), (1.3.4) справедливо соотношение:

$$\delta_2^{(L_2)} \leq \frac{\text{mes } X \max_{i=1, \dots, M} \mathbf{D}\zeta^{(i)}}{\bar{n}}. \quad (1.4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сразу заметим, что соотношение (1.4.4) можно трактовать как свойство «сноса  $L_2$ -погрешности в узлы» (устойчивости), так как по определению дисперсии величина  $\mathbf{D}\zeta^{(i)}$  является среднеквадратической мерой «разброса» распределения несмещенной оценки  $\zeta^{(i)}$  около значения  $\varphi(\mathbf{x}_i)$ .

С учетом тождества  $\mathbf{D}\tau = \mathbf{D}(\tau + C)$ ,  $C = \text{const}$  [31], справедливого для любой случайной величины  $\tau$ , имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}L_M\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) &= \mathbf{D}(L_M\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) - L_M\varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \zeta_j^{(i)}\right) \chi_i(\mathbf{x}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^M \varphi(\mathbf{x}_i) \chi_i(\mathbf{x})\right) = \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{\zeta}_j^{(i)}\right) \chi_i(\mathbf{x})\right), \end{aligned}$$

где  $\tilde{\zeta}_j^{(i)} = \zeta_j^{(i)} - \varphi(\mathbf{x}_i)$ . Зафиксируем  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_0 \in X$ . Учитывая, что  $\mathbf{E}\tilde{\zeta}_j^{(i)} = 0$  для всех  $i = 1, \dots, M$  и  $j = 1, \dots, n_i$ , получаем оценку:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}L_M\tilde{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}_0) &= \sum_{i=1}^M \mathbf{D}\left(\frac{\chi_i(\hat{\mathbf{x}}_0)}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \tilde{\zeta}_j^{(i)}\right) + \\ &+ \sum_{i_1, i_2=1, \dots, M; i_1 \neq i_2} \frac{\chi_{i_1}(\hat{\mathbf{x}}_0) \chi_{i_2}(\hat{\mathbf{x}}_0)}{n_{i_1} n_{i_2}} \sum_{j_1, j_2=1}^{n_{i_1}, n_{i_2}} \mathbf{E}\left(\tilde{\zeta}_{j_1}^{(i_1)} \tilde{\zeta}_{j_2}^{(i_2)}\right). \quad (1.4.5) \end{aligned}$$

Для независимых оценок  $\{\zeta^{(i)}\}$  в узлах сетки (см. далее разд. 1.5) слагаемое (1.4.5) равно нулю. Для зависимых  $\{\zeta^{(i)}\}$  (см. далее разд. 1.6) имеем  $n_1 = \dots = n_M = \bar{n} = n$  и

$$\sum_{i_1, i_2=1, \dots, M; i_1 \neq i_2} \frac{\chi_{i_1}(\hat{\mathbf{x}}_0) \chi_{i_2}(\hat{\mathbf{x}}_0)}{n_{i_1} n_{i_2}} \sum_{j_1, j_2=1}^{n_{i_1}, n_{i_2}} \mathbf{E}\left(\tilde{\zeta}_{j_1}^{(i_1)} \tilde{\zeta}_{j_2}^{(i_2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i_1, i_2=1, \dots, M; i_1 \neq i_2} \chi_{i_1}(\hat{\mathbf{x}}_0) \chi_{i_2}(\hat{\mathbf{x}}_0) \mathbf{E} \left( \tilde{\zeta}^{(i_1)} \tilde{\zeta}^{(i_2)} \right);$$

здесь использована независимость величин  $\tilde{\zeta}_j^{(i)}$  для разных  $j$ . Далее, применяя вероятностный аналог неравенства Коши–Буняковского (см. [31], гл. 4, § 7, теорема 3)

$$\mathbf{E} \left| \tilde{\zeta}^{(i_1)} \tilde{\zeta}^{(i_2)} \right| \leq \sqrt{\mathbf{E} \left( \tilde{\zeta}^{(i_1)} \right)^2 \mathbf{E} \left( \tilde{\zeta}^{(i_2)} \right)^2} = \sqrt{\mathbf{D}\tilde{\zeta}^{(i_1)} \mathbf{D}\tilde{\zeta}^{(i_2)}}$$

и соотношения  $\mathbf{D}\tilde{\zeta}^{(i)} = \mathbf{D}\zeta^{(i)}$  для  $i = 1, \dots, M$ , получаем оценку сверху:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}L_M \tilde{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}_0) &\leq \frac{\max_{i=1, \dots, M} \mathbf{D}\zeta^{(i)}}{\bar{n}} \left( \sum_{i=1}^M \chi_i^2(\hat{\mathbf{x}}_0) + \right. \\ &+ \left. \sum_{i_1, i_2=1, \dots, M; i_1 \neq i_2} \chi_{i_1}(\hat{\mathbf{x}}_0) \chi_{i_2}(\hat{\mathbf{x}}_0) \right) = \frac{\max_{i=1, \dots, M} \mathbf{D}\zeta^{(i)}}{\bar{n}} \left( \sum_{i=1}^M \chi_i(\hat{\mathbf{x}}_0) \right)^2. \end{aligned}$$

Наконец, в силу утверждения 1.4.1 и произвольности  $\hat{\mathbf{x}}_0 \in X$ , имеем:

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{D}L_M \tilde{\varphi}(\mathbf{x}) \leq \frac{\max_{i=1, \dots, M} \mathbf{D}\zeta^{(i)}}{\bar{n}} \quad \text{и} \quad \delta_2^{(L_2)} \leq \frac{\text{mes } X \max_{i=1, \dots, M} \mathbf{D}\zeta^{(i)}}{\bar{n}}.$$

Утверждение 1.4.2 доказано.

## 1.5. Независимые оценки в узлах сетки

**1.5.1. Независимые оценки в узлах сетки для интеграла, зависящего от параметра.** Далее рассмотрен вопрос о том, как строить оценки  $\zeta^{(i)}$  в узлах сетки для функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Рассмотрим сначала *независимые оценки в узлах сетки*.

Для интеграла, зависящего от параметра, можно по аналогии со «скалярным» случаем (см. соотношение (1.1.2)) использовать приближение

$$\varphi_1(\mathbf{x}_i) = \int_Y \frac{g(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}')}{f_i(\mathbf{x}')} f_i(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \mathbf{E}\zeta^{(i)} \approx Z_{n_i}^{(i)} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{g(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}_j^{(i)})}{f_i(\boldsymbol{\xi}_j^{(i)})}, \quad (1.5.1)$$



где случайные векторы  $\xi_j^{(i)}$  распределены согласно плотности  $f_i$ . Преимуществом такого подхода является возможность уменьшения дисперсий  $\mathbf{D}\zeta^{(i)}$  (а значит и погрешностей  $\delta_2^{(L_2)}, \delta_2^{(C)}$ ) за счет специального выбора плотностей  $\{f_i\}$  (здесь можно применять метод выборки по важности и другие способы уменьшения дисперсии). Очевиден и явный недостаток оценок (1.5.1), связанный с необходимостью оптимального выбора распределения и построения соответствующего алгоритма моделирования для каждого узла  $\mathbf{x}_i$ . С этой точки зрения более привлекательным выглядит метод зависимых испытаний (см. далее разд. 1.6), сходимость которого, однако, обусловлена гладкостью функции  $\varphi_1(\mathbf{x})$  по параметру  $\mathbf{x}$  (см. далее разд. 2.6).

**1.5.2. Независимые оценки в узлах сетки для решения интегрального уравнения.** В качестве аналога оценок (1.5.1) для функции  $\varphi_2$  будем рассматривать оценки по *методу сопряженных блужданий*. Представим идею этого метода с позиций теории обобщенных функций.

Заметим, что значение  $\varphi_2(\mathbf{x}_i)$  можно представить в виде функционала (1.1.3):

$$\varphi_2(\mathbf{x}_i) = (\varphi_2, \hat{h}_i), \quad \hat{h}_i(x) = \delta(x - \mathbf{x}_i). \quad (1.5.2)$$

Ясно, что для такого функционала нельзя использовать оценку по столкновениям (1.1.5) ввиду невозможности подсчета дельта-функции из (1.5.2) в случайных точках  $x_m$ . Воспользуемся тем обстоятельством, что  $(\varphi_2, \hat{h}) = (\varphi_2^*, \hat{f})$ , где  $\varphi_2^*$  – решение сопряженного (относительно функционала (1.1.3)) интегрального уравнения

$$\varphi_2^*(y) = \int_X \hat{k}^*(y', y) \varphi_2^*(y') dy' + \hat{h}(y); \quad \text{или} \quad \varphi_2^* = K^* \varphi_1^* + \hat{h}, \quad (1.5.3)$$

где  $K^*$  – интегральный оператор с ядром  $\hat{k}^*(y', y) = \hat{k}(y, y')$ . Вместо оценки (1.1.5) можно строить оценку по столкновениям для функционала  $(\varphi_2^*, \hat{f})$  от решения  $\varphi_2^*$  уравнения (1.5.3):

$$\xi^* = \sum_{m=0}^{N^*} Q_m^* \hat{f}(y_m), \quad (1.5.4)$$

где однородная, обрывающаяся с вероятностью единица цепь Маркова  $y_0, y_1, \dots, y_{N^*}$  имеет начальную плотность  $\pi^*(y)$  и переходную функцию  $p^*(y', y) = r^*(y', y)(1 - p_a^*(y'))$ ;

$$Q_0^* = \frac{\hat{h}(y_0)}{\pi^*(y_0)}, \quad Q_m^* = Q_{m-1}^* \frac{\hat{k}^*(y_{m-1}, y_m)}{p^*(y_{m-1}, y_m)}. \quad (1.5.5)$$

В случае  $\hat{h}(x) = \hat{h}_i(x) = \delta(x - \mathbf{x}_i)$  возникают трудности с реализацией оценки (1.5.4) в связи с невозможностью вычисления веса  $Q_0^*$  из (1.5.5). Однако здесь может быть реализована идея «включения особенности в плотность» (см., например, [16]). Возьмем в качестве начальной плотности  $\pi^*(y)$  функцию  $\delta(y - \mathbf{x}_i)$ . Это означает, что начальное состояние  $y_0$  является случайной величиной, тождественно (с вероятностью единица) равной  $\mathbf{x}_i$  (т. е. это уже по сути детерминированная – неслучайная – величина). Соответственно при моделировании траекторий цепи  $y_0, y_1, \dots, y_{N^*}$  следует брать  $y_0 = \mathbf{x}_i$ , при этом  $Q_0^* \equiv 1$ . Таким образом получается несмещенная оценка метода сопряженных блужданий:

$$\varphi_2(\mathbf{x}_i) = \mathbf{E}\zeta^{(i)}, \quad \zeta^{(i)} = \sum_{m=1}^{N^*} Q_m^* \hat{f}(y_m) + \hat{f}(\mathbf{x}_i). \quad (1.5.6)$$

Недостатком набора оценок  $\{\zeta^{(i)}\}$  вида (1.5.6) является то обстоятельство, что для каждого узла  $\mathbf{x}_i$  требуется моделировать индивидуальный набор траекторий цепи Маркова, стартовых именно в точке  $\mathbf{x}_i$ . Этого недостатка лишена локальная оценка (см. далее разд. 1.6), сходимость которой, однако, обусловлена гладкостью функций  $\varphi_2(x)$ ,  $\hat{k}(x, x')$ ,  $\hat{f}(x)$  по параметру  $x$  (см. далее разд. 2.6). К сожалению, на практике последнее требование выполняется крайне редко.

## 1.6. Метод зависимых испытаний

**1.6.1. Зависимые оценки в узлах сетки для интеграла, зависящего от параметра.** В работе [32] для вычисления функции  $\varphi_1$  в точке предложено использовать следующий алгоритм – *метод зависимых испытаний*:

$$\varphi_1(\mathbf{x}_i) = \int_Y \frac{g(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}')}{f(\mathbf{x}')} f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \mathbf{E}\hat{\zeta}(\mathbf{x}_i) \approx \hat{Z}_n^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{g(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}_j)}{f(\boldsymbol{\xi}_j)}. \quad (1.6.1)$$

Плотность  $f(\mathbf{x}')$  здесь – одна и та же для всех  $\mathbf{x} \in X$  (в том числе и для точек сетки  $X^{(M)}$ ). Более того, для всех  $\mathbf{x} \in X$  используются одни и те же выборочные значения  $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_n$ , реализуемые в  $Y$  согласно плотности  $f$ .

Разница в программной реализации алгоритмов (1.5.1) и (1.6.1) состоит, в частности, в том, что для оценки (1.5.1) строится внешний цикл

по номерам  $i$  узлов сетки  $X^{(M)}$  (т. е.  $i = 1, \dots, M$ ), внутри которого имеется цикл по номерам  $j$  испытаний  $\xi_j^{(i)}$ , моделируемых согласно плотности  $f_i$ ; здесь  $j = 1, \dots, n_i$ . Для оценки (1.6.1) внешним является цикл по номерам  $j = 1, \dots, n$  испытаний  $\xi_j$ , реализуемых согласно «общей» плотности  $f$ , а во внутреннем цикле по  $i$  вносятся вклады  $g(\mathbf{x}_i, \xi_j)/f(\xi_j)$  в массив «сумматоров», накапливающих суммы (1.6.1) в узлах  $\mathbf{x}_i$ .

Перечислим преимущества метода зависимых испытаний.

1) Нужен выбор всего одной плотности  $f$  и соответствующего алгоритма моделирования случайного вектора  $\xi$ .

2) Если исходная функция  $\varphi_1(\mathbf{x})$  является гладкой функцией по параметру  $\mathbf{x}$  (для этого, как правило, достаточно потребовать гладкости подынтегральной функции  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  по  $\mathbf{x}$ ), то приближенные значения  $Z_n^{(i)}$  из (1.6.1) ложатся на гладкую кривую. Таким образом, метод зависимых испытаний (в отличие от оценок (1.5.1)) «сохраняет гладкость» приближаемой функции.

3) Для гладких функций  $\varphi_1(\mathbf{x})$  также удается показать, что скорость сходимости (по вероятности) метода (1.6.1) в метрике пространства  $C(X)$  имеет порядок  $n^{-1/2}$  по числу испытаний (т. е. несмотря на то что оценивается по сути континуум интегралов (1.1.8), порядок сходимости такой же, как для приближения одного интеграла (1.1.2)) – см. далее разд. 1.10.

**1.6.2. Зависимые оценки в узлах сетки для решения интегрального уравнения.** Для функции  $\varphi_2(x)$  аналогом приближения (1.6.1) является *локальная оценка*, идея построения которой состоит в следующем. Заметим, что первый член

$$I_{\hat{k},x} = K\varphi_2(x) = \int_X \hat{k}(x', x)\varphi_2(x') dx' \quad (1.6.2)$$

в правой части уравнения (1.1.4) имеет форму функционала (1.1.3) для параметрической функции  $\hat{h}_x(x') = \hat{k}(x', x)$ . Для каждого  $x$  можно построить оценку по столкновениям вида (1.1.5) для функционала  $I_{\hat{k},x}$  и прибавить свободный член  $f(x)$  уравнения (1.1.4):

$$\varphi_2(x) = \mathbf{E}\xi(x), \quad \xi(x) = \sum_{m=0}^N Q_m \hat{k}(x_m, x) + \hat{f}(x). \quad (1.6.3)$$

При реализации соответствующего дискретно-стохастического алгоритма 1.1.1 можно использовать один и тот же набор траекторий

$x_0^{(j)}, x_1^{(j)}, \dots, x_{N^{(j)}}^{(j)}$  (здесь  $j = 1, \dots, n$ ) для всех  $x$  (и, в частности, для узлов  $\mathbf{x}_i$  сетки  $X^{(M)}$ ).

В очередной раз заметим, что обоснованное применение локальной (а по сути – «глобальной») оценки (1.6.3) (что означает, в частности, возможность получения скорости сходимости  $n^{-1/2}$  по числу испытаний) возможно только для гладких функций  $\varphi_2(x), \hat{k}(x', x), \hat{f}(x)$  по переменной  $x$  (см. далее разд. 1.10). Однако на практике часто ядро  $\hat{k}(x', x)$  и свободный член  $\hat{f}(x)$  содержат особенности типа дельта-функций по части переменных, и приходится локально «вырезать» эти особенности, приближая негладкие функции  $\hat{k}(x', x), \hat{f}(x)$  гладкими аналогами (отсюда название «локальная оценка»).

## 1.7. Методы гистограмм и полигона частот

**1.7.1. Смещенные «слабо зависимые» оценки в узлах сетки для решения интегрального уравнения.** Рассмотрим следующий метод, позволяющий получить приближенную оценку значения функции  $\varphi_2$  в заданной точке  $\hat{x}$ . Мы задаемся малым  $h$  и считаем точку  $\hat{x}$  центром  $l$ -мерного куба  $\Delta_{\hat{x}}$  с ребром  $h$ . Рассмотрим также функцию  $\hat{h}_{\hat{x}}(x)$ , равную  $1/h^l$  при  $x \in \Delta_{\hat{x}}$  и нулю иначе. Полагаем

$$\varphi_2(\hat{x}) \approx (\varphi_2, \hat{h}_{\hat{x}}) = \int_{\Delta_{\hat{x}}} \frac{\varphi_2(y) dy}{h^l} \quad (1.7.1)$$

и строим соответствующую оценку по столкновениям:

$$(\varphi_2, \hat{h}_{\hat{x}}) = \mathbf{E}\xi^{(\hat{x})}, \quad \xi^{(\hat{x})} = \sum_{m=0}^N Q_m \hat{h}_{\hat{x}}(x_m). \quad (1.7.2)$$

При малых  $h$  попадание состояний  $x_m$  цепи Маркова в куб  $\Delta_{\hat{x}}$  будет происходить редко, поэтому для оценки решения в одной точке соответствующий алгоритм метода Монте-Карло (1.1.1) является малоэффективным.

Целесообразнее использовать оценки вида (1.7.2) в дискретно-стохастическом алгоритме 1.1.1 приближения функции  $\varphi_2$  в простой области (1.3.1). Считаем, что точки  $\mathbf{x}_i$  являются центрами непересекающихся кубов  $\{\Delta_{\mathbf{x}_i}\}$ . Далее можно рассмотреть  $M$  оценок  $\xi^{(\mathbf{x}_i)}$  вида (1.7.2). Каждое состояние  $x_m$  цепи Маркова дает вклад к какому-либо из оценок  $\xi^{(\mathbf{x}_i)}$ . Это обеспечивает «слабую зависимость», так как коэффициенты

корреляции между случайными величинами  $\{\xi^{(\mathbf{x}_i)}\}$  убывают с ростом числа узлов  $M$  [33].

Если в алгоритме 1.1.1 используется восполнение с базисными функциями Стренга–Фикса (1.3.2) для кусочно-постоянной производящей функции (1.3.3), то соответствующий метод (1.1.13) с оценками  $\{\xi^{(\mathbf{x}_i)}\}$  в узлах сетки можно назвать *методом гистограмм*. В случае, когда производящей является «функция-крышка» (1.3.4) (т. е. когда применяется мультилинейное восполнение), алгоритм 1.1.1 с оценками (1.7.2) называется *многомерным аналогом метода полигона частот*.

**1.7.2. Оценка смещения.** Отметим, что оценка (1.7.2) величины  $\varphi_2(\hat{x})$  является смещенной на величину  $d_{\hat{x}} = |\varphi_2(\hat{x}) - (\varphi_2, \hat{h}_{\hat{x}})|$ . В силу определения функции  $\hat{h}_{\hat{x}}$  смещение равно:

$$d_{\hat{x}} = \left| h^l \varphi_2(\hat{x}) - \int_{\Delta_{\hat{x}}} \varphi_2(y) dy \right| / h^l.$$

Для случая  $l = 1$  справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.7.1. *Если  $\varphi_2 \in C^2(X)$ , то*

$$d_{\hat{x}} \leq \frac{h^2}{24} \max_{y \in \Delta_{\hat{x}}} |\varphi_2''(y)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно показать, что

$$h\varphi_2(\hat{x}) = \int_{\hat{x}-h/2}^{\hat{x}+h/2} (\varphi_2(\hat{x}) + \varphi_2'(\hat{x})(y - \hat{x})) dy.$$

Кроме того, согласно формуле Тейлора, имеем:

$$\varphi_2(y) = \varphi_2(\hat{x}) + \varphi_2'(\hat{x})(y - \hat{x}) + D_1,$$

где  $y \in [\hat{x} - h/2, \hat{x} + h/2]$ ,  $D_1 \leq \frac{(y - \hat{x})^2}{2} \max_{y \in [\hat{x} - h/2, \hat{x} + h/2]} |\varphi_2''(y)|$ . Тогда

$$\begin{aligned} d_{\hat{x}} &\leq \frac{1}{h} \max_{y \in [\hat{x} - h/2, \hat{x} + h/2]} |\varphi_2''(y)| \int_{\hat{x}-h/2}^{\hat{x}+h/2} \frac{(y - \hat{x})^2}{2} dy = \\ &= \frac{h^2}{24} \max_{y \in [\hat{x} - h/2, \hat{x} + h/2]} |\varphi_2''(y)|. \end{aligned}$$

Утверждение 1.7.1 доказано.

Индукцией по  $l$  можно доказать, что

$$d_{\hat{x}} \leq \frac{h^2}{24} \left( \max_{y \in \Delta_{\hat{x}}} |\varphi''_{2(y^{(1)}y^{(1)})}(y)| + \dots + \max_{y \in \Delta_{\hat{x}}} |\varphi''_{2(y^{(l)}y^{(l)})}(y)| \right),$$

где  $\varphi'_{2(y^{(j)})}$  обозначает частную производную по координате  $y^{(j)}$ ;  $j = 1, \dots, l$ . Таким образом, смещение значений функции  $\varphi_2$  в узлах сетки для методов гистограмм и полигона частот имеет второй порядок малости по шагу сетки  $h$ .

**1.7.3. Нецелесообразность использования гладких восполнений.** При реализации алгоритма 1.1.1 с оценками (1.7.2) в узлах нецелесообразно использовать гладкие восполнения, т. е. не нужно брать образующую функцию  $\chi(x) = \beta^{(r)}(x)$  для  $r > 1$  в восполнении (1.1.10) с базисом (1.3.2). Покажем это на примере  $C$ -подхода (1.2.2) к оценке погрешности. Для смещенных оценок  $\{\xi^{(\mathbf{x}_i)}\}$  в узлах сетки погрешность распадается на три компоненты:  $\delta^{(C)} \leq \delta_1^{(C)} + \delta_2^{(C)} + \delta_3^{(C)}$ , где

$$\delta_1^{(C)} = \rho_C(\varphi_2, L_M \varphi_2), \quad \delta_2^{(C)} = \rho_C(L_M \tilde{\varphi}_2, L_M \hat{\varphi}_2), \quad \delta_3^{(C)} = \rho_C(L_M \varphi_2, L_M \hat{\varphi}_2),$$

$$L_M \varphi_2(x) = \sum_{i=1}^M w_i (\varphi_2(\mathbf{x}_1), \dots, \varphi_2(\mathbf{x}_M)) \chi(x),$$

$$L_M \tilde{\varphi}_2(x) = \sum_{i=1}^M w_i (Z_n(\mathbf{x}_1), \dots, Z_n(\mathbf{x}_M)) \chi(x),$$

$$L_M \hat{\varphi}_2(x) = \sum_{i=1}^M w_i (\mathbf{E} \xi^{(\mathbf{x}_1)}, \dots, \mathbf{E} \xi^{(\mathbf{x}_M)}) \chi(x).$$

По аналогии с получением неравенств (1.4.2), (1.4.3) несложно получить оценку компоненты смещения:

$$\delta_3^{(C)} \leq L \max_{i=1, \dots, M} |\varphi_2(\mathbf{x}_i) - \mathbf{E} \xi^{(\mathbf{x}_i)}|.$$

Тогда из утверждения 1.7.1 следует, что  $\delta_3^{(C)} \sim h^2$ . Для мультилинейного восполнения имеем  $\delta_1^{(C)} \sim h^2$  (см. соотношение (1.3.6)). Использование образующей функции  $\chi(x) = \beta^{(r)}(x)$  для  $r > 1$  позволяет повысить порядок по  $h$  погрешности  $\delta_1^{(C)}$ . Например, в [29] для  $\varphi_2 \in C^4(X)$  удалось найти коэффициенты  $W^{(M)}$ , для которых  $\delta_1^{(C)} \sim h^4$ . Однако

порядок по  $h$  величины  $\delta_3^{(C)}$  остается прежним (вторым). Поэтому даже для гладких восполнений имеем  $(\delta_1^{(C)} + \delta_3^{(C)}) \sim h^2$ . Отсюда следует указанная выше нецелесообразность выбора гладких восполнений для метода полигона частот.

## 1.8. Оценка стохастической компоненты погрешности для $L_2$ -подхода

**1.8.1. Случай независимых оценок в узлах сетки.** Из соотношения (1.4.4) следует, что для получения верхней границы стохастической компоненты погрешности  $\delta_2^{(L_2)}$  нужно оценить максимум:

$$d^{(L_2)} = \max_{i=1, \dots, M} \mathbf{D}\zeta^{(i)}. \quad (1.8.1)$$

Рассмотрим проблему оценки этой величины для функций  $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$  для независимых и зависимых оценок  $\{\zeta^{(i)}\}$  в узлах сетки.

Для интеграла, зависящего от параметра, дисперсии оценок (1.5.1) имеют простой вид:

$$\mathbf{D}\zeta^{(i)} = \int_Y \frac{g^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}')}{f_i(\mathbf{x}')} d\mathbf{x}' - \varphi_1^2(\mathbf{x}_i), \quad (1.8.2)$$

но «компактно» сформулировать условия конечности этих величин не удастся ввиду «уникальности» плотностей  $f_i$  для каждого узла  $\mathbf{x}_i$ . Однако главный смысл выбора специальных плотностей в узлах как раз состоит в том, чтобы величины (1.8.2) получались малыми.

Для независимых оценок в узлах (1.5.6) справедливо следующее

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.8.1** [14, 22]. *Если  $p^*(x', x) \neq 0$  при  $k^*(x', x) \neq 0$ ,  $f \in L_1(X)$  и норма в  $L_1(X)$  интегрального оператора уравнения*

$$\mathbf{E}\xi_{\hat{x}}^2 = f(\hat{x})(2\varphi_2(\hat{x}) - f(\hat{x})) + \int_X \frac{k^2(z, \hat{x})}{p^*(\hat{x}, z)} \mathbf{E}\xi_z^2 dz$$

*меньше единицы, то  $\mathbf{D}\xi_{\hat{x}} = \mathbf{E}\xi_{\hat{x}}^2 - (\varphi_2(\hat{x}))^2$ .*

В качестве  $\hat{x}$  здесь можно подставлять узлы  $\mathbf{x}_i$  и, более того, использовать различные переходные функции  $p^*(x', x) = p_i(x', x)$  для разных номеров узлов  $i$ . Как видно, в этом случае сформулировать «компактные» условия малости величины (1.8.1) является еще более сложной задачей (и это – очередной недостаток оценок (1.5.6)).

**1.8.2. Случай зависимых и «слабо зависимых» оценок в узлах сетки.** Для метода зависимых испытаний (1.6.1) имеем:

$$\mathbf{D}\zeta(\mathbf{x}) = \int_Y \frac{g^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{f(\mathbf{x}')} d\mathbf{x}' - \varphi_1^2(\mathbf{x}), \quad (1.8.3)$$

и здесь можно последовательно брать  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ ;  $i = 1, \dots, M$ . Учитывая то обстоятельство, что  $X$  – компакт в  $R^l$ , можно потребовать непрерывности функции (1.8.3) в  $X$ . Для этого, в свою очередь, можно предположить ограниченность области  $Y \subset R^s$ , отделенность «общей» плотности  $f$  от нуля и непрерывность подынтегральной функции  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  по параметру  $\mathbf{x}$ . Для оценки (1.6.3) имеем

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.8.2 [14, 22]. *Если*

$$\pi(x) \neq 0 \text{ при } \hat{f}(x) \neq 0; \quad p(x', x) \neq 0 \text{ при } \hat{k}(x', x) \neq 0, \quad (1.8.4)$$

$$\hat{f} \in L_1(X), \quad \hat{f}^2/\pi \in L_1(X) \quad (1.8.5)$$

и, кроме того,

$$\|K_1\|_{L_1(X)} < 1, \quad \|K_1^*\|_{L_\infty(X)} < 1, \quad \|K_p\|_{L_1(X)} < 1, \quad (1.8.6)$$

(здесь  $K_1, K_1^*, K_p$  – интегральные операторы с ядрами  $|\hat{k}(x', x)|, |\hat{k}(x, x')|$  и  $\hat{k}^2(x', x)/p(x', x)$  соответственно), то

$$\mathbf{D}\xi(x) = \mathbf{E}\xi^2(x) - \varphi_2^2(x), \quad \mathbf{E}\xi^2(x) = (\hat{\chi}, \hat{k}(\cdot, x)[2\varphi_2^{*(x)} - \hat{k}(\cdot, x)]), \quad (1.8.7)$$

где функция  $\hat{\chi}(y)$  является решением уравнения

$$\hat{\chi}(y) = \int_X \frac{\hat{k}^2(y', y) \hat{\chi}(y') dy'}{p(y', y)} + \frac{\hat{f}^2(y)}{\pi(y)} \quad \text{или} \quad \hat{\chi} = K_p \hat{\chi} + \frac{\hat{f}^2}{\pi}, \quad (1.8.8)$$

а  $\varphi_2^{*(x)}(y)$  – решение уравнения

$$\varphi_2^{*(x)}(y) = \int_X \hat{k}(y, z) \varphi_2^{*(x)}(z) dz + \hat{k}(y, x). \quad (1.8.9)$$

Для ограниченности максимума  $d^{(L_2)}$  величин  $\mathbf{D}\zeta^{(i)} = \mathbf{D}\xi(\mathbf{x}_i)$  достаточно потребовать непрерывности функций (1.8.7) на компакте  $X$ . Это следует, например, из непрерывности ядра  $\hat{k}(x', x)$  и свободного члена на  $\hat{f}(x)$  по  $x$  (нужна также интегрируемость функций  $\hat{\chi}$  и  $\varphi_2^{*(x)}$ ) [22].



К сожалению, указанные свойства параметров уравнения (1.1.4) не соблюдаются во многих практически важных задачах.

Сформулируем также утверждение о дисперсии оценки (1.7.2).

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.8.3** [22, 33]. *Если выполнены соотношения (1.8.4)–(1.8.6), то*

$$\mathbf{D}\xi^{(\hat{x})} = \mathbf{E}(\xi^{(\hat{x})})^2 - \left( \int_{\Delta_{\hat{x}}} \frac{\varphi_2(y) dy}{h^l} \right)^2, \quad \mathbf{E}(\xi^{(\hat{x})})^2 = \int_{\Delta_{\hat{x}}} \frac{\hat{\chi}(y)(2h^l \bar{\varphi}_2^{*(\hat{x})} - 1) dy}{h^{2l}},$$

где функция  $\hat{\chi}$  является решением уравнения (1.8.8), а  $\bar{\varphi}_2^{*(\hat{x})}$  – решение уравнения

$$\bar{\varphi}^{*(\hat{x})}(y) = \int_{\Delta_{\hat{x}}} \hat{k}(y, z) \bar{\varphi}^{*(\hat{x})}(z) dz + 1/h^l, \quad y \in \Delta_{\hat{x}}.$$

Анализ условий ограниченности соответствующей величины (1.8.1) для  $\zeta^{(i)} = \xi^{(\mathbf{x}_i)}$  имеется в работах [22, 33].

## 1.9. Оценка стохастической компоненты погрешности для $C$ -подхода (случай независимых оценок в узлах)

**1.9.1. Использование центральной предельной теоремы.** Из соотношений (1.4.2), (1.4.3) следует, что для получения верхней границы стохастической компоненты погрешности  $\delta_2^{(C)}$  нужно оценить максимум:

$$d^{(C)} = \max_{i=1, \dots, M} |Z_{n_i}(\mathbf{x}_i) - \varphi(\mathbf{x}_i)|. \quad (1.9.1)$$

Для независимых несмещенных оценок в узлах сетки имеем:

$$d^{(C)} = \max_{i=1, \dots, M} \left| \frac{S_{n_i}^{(i)} - n_i \varphi(\mathbf{x}_i)}{n_i} \right| \leq \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{\bar{n}}} \max_{i=1, \dots, M} \left| \frac{S_{n_i}^{(i)} - n_i \mathbf{E}\zeta^{(i)}}{\sigma_i \sqrt{\bar{n}_i}} \right|,$$

где

$$S_{n_i}^{(i)} = \zeta_1^{(i)} + \dots + \zeta_{n_i}^{(i)}; \quad \bar{n} = \min_{i=1, \dots, M} n_i; \quad \bar{\sigma} = \max_{i=1, \dots, M} \sigma_i, \quad \sigma_i = \sqrt{\mathbf{D}\zeta^{(i)}}.$$

Из центральной предельной теоремы следует, что при достаточно большом  $\bar{n}$  случайные величины  $(S_{n_i}^{(i)} - n_i \mathbf{E}\zeta^{(i)}) / (\sigma_i \sqrt{\bar{n}_i})$  близки по распределению к стандартным нормальным случайным величинам  $w_i \in N(0, 1)$ .

Поэтому для малого  $\varepsilon > 0$  найдется величина  $A(M, \varepsilon)$ , для которой выполнено соотношение

$$\mathbf{P} \left( d^{(C)} \leq A(M, \varepsilon) \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}} \right) \approx \mathbf{P} \left( \max_{i=1, \dots, M} |w_i| \leq A(M, \varepsilon) \right) \geq 1 - \varepsilon. \quad (1.9.2)$$

**1.9.2. Использование теории порядковых статистик.** Теперь исследуем вопрос о том, как зависит величина  $A(M, \varepsilon)$  от  $M$ . Изучим распределение величины  $w_M^{(M)} = \max_{i=1, \dots, M} w_i$ . Это  $M$ -я порядковая статистика из набора  $w_1, \dots, w_M$  независимых стандартных нормальных случайных величин. В теории порядковых статистик для такого максимума справедливо следующее

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.9.1 [34].** *Асимптотическое при  $M \rightarrow \infty$  распределение максимума  $w_M^{(M)}$  таково, что*

$$\mathbf{P} \left( a_M \left( w_M^{(M)} - b_M \right) \leq y \right) \rightarrow \exp(-\exp(-y)),$$

где  $a_M = (2 \ln M)^{1/2}$ ,  $b_M = (2 \ln M)^{1/2} - \frac{1}{2}(2 \ln M)^{-1/2}(\ln \ln M + \ln 4\pi)$ .

**1.9.3. Получение верхней границы (по вероятности) для  $d^{(C)}$ .** Заметим, что  $\min(w_1, \dots, w_M) = -\max(-w_1, \dots, -w_M)$  и

$$\max_{i=1, \dots, M} |w_i| = \max \left( \max_{i=1, \dots, M} w_i, -\min_{i=1, \dots, M} w_i \right).$$

Учитывая симметрию распределения стандартных нормальных случайных величин  $\{w_i\}$  относительно нуля, можно утверждать, что для достаточно больших  $M$  выполнено

$$\mathbf{P} \left( a_M \left( \max_{i=1, \dots, M} |w_i| - b_M \right) \leq y \right) \approx \exp(-2 \exp(-y)).$$

Выберем число  $y_0(\varepsilon)$ , для которого выполнено равенство

$$\exp(-2 \exp(-y_0(\varepsilon))) = 1 - \varepsilon,$$

и рассмотрим неравенство

$$a_M \left( \max_{i=1, \dots, M} |w_i| - b_M \right) \leq y_0(\varepsilon),$$

которое равносильно соотношению  $\max_{i=1, \dots, M} |w_i| \leq y_0(\varepsilon)/a_M + b_M$  или

$$\max_{i=1, \dots, M} |w_i| \leq (2 \ln M)^{1/2} + (2 \ln M)^{-1/2} \left( y_0(\varepsilon) - \frac{\ln 4\pi}{2} - \frac{\ln \ln M}{2} \right).$$

Таким образом, для достаточно больших  $\bar{n}$  и  $M$  выполнено

$$A(M, \varepsilon) \approx (2 \ln M)^{1/2} + (2 \ln M)^{-1/2} \left( H(\varepsilon) - \frac{\ln \ln M}{2} \right),$$

где  $H(\varepsilon) = y_0(\varepsilon) - (\ln 4\pi)/2$ . С учетом соотношения (1.9.2) справедливо

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.9.2.** *Для любого  $\varepsilon > 0$  существуют натуральное  $M_0$  и действительная константа  $H(\varepsilon)$  такие, что для всякого  $M > M_0$  найдется натуральное число  $n_0(M)$  такое, что для всех  $\bar{n} > n_0(M)$  выполнено*

$$\mathbf{P} \left\{ d^{(C)} \leq \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{\bar{n}}} \left( (2 \ln M)^{1/2} + (2 \ln M)^{-1/2} \left( H(\varepsilon) - \frac{\ln \ln M}{2} \right) \right) \right\} > 1 - \varepsilon. \quad (1.9.3)$$

Таким образом, стохастическая компонента погрешность  $\delta_2^{(C)}$  для независимых оценок  $\{\zeta^{(i)}\}$  в узлах сетки растет с увеличением числа узлов  $M$ , однако скорость этого роста относительно невелика: ее порядок равен  $(\ln M)^{1/2}$ .

Отметим, что в работе [33] показано, что при согласованном стремлении параметров  $M$  и  $n$  к бесконечности для дискретно-стохастического алгоритма 1.1.1 с мультилинейным восполнением (1.1.10), (1.3.2), (1.3.4) и со «слабо зависимыми» оценками (1.7.2) функции  $\varphi_2$  в узлах сетки  $\hat{x} = \mathbf{x}_i$  для погрешности  $\delta_2^{(C)} = d^{(C)}$  справедлива оценка вида (1.9.3), где вместо  $\bar{\sigma}/\sqrt{\bar{n}}$  фигурирует множитель  $\bar{\sigma}M/\sqrt{\bar{n}}$ .

## 1.10. Оценка стохастической компоненты погрешности для $C$ -подхода (случай зависимых оценок в узлах)

### 1.10.1. Теорема о сходимости метода зависимых испытаний.

Рассмотрим случайное поле  $\zeta(\mathbf{x}) = \hat{\zeta}(\mathbf{x}) \vee \xi(x)$  (см. формулы (1.6.1), (1.6.3)), а также случайную функцию  $\zeta(\mathbf{x}) = \hat{\zeta}(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in X$ .

Рассмотрим приближение  $Z_n(\mathbf{x}) = (1/n) \sum_{j=1}^n \zeta_j(\mathbf{x})$  функции математического ожидания  $\mathbf{E}\zeta(\mathbf{x})$ , где  $\zeta_j(\mathbf{x})$  – независимые, распределенные как  $\zeta(\mathbf{x})$ , случайные функции.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.10.1.** *Пусть траектории случайной функции  $\tilde{\zeta}(\mathbf{x})$  с вероятностью единица непрерывны на  $X$ , существует положительная константа  $H_1$  такая, что*

$$\mathbf{D}\zeta(\mathbf{x}) < H_1 \quad \text{для всех } \mathbf{x} \in X, \quad (1.10.1)$$

и, кроме того, выполнено условие (1.10.2):  
**для любого  $k : 1 \leq k \leq s$  существуют производные**

$$\frac{\partial^k \tilde{\zeta}(x^{(1)}, \dots, x^{(l)})}{\partial(x^{(1)})^{m_1} \dots \partial(x^{(l)})^{m_l}}, \quad m_i = 0 \text{ или } m_i = 1, \quad m_1 + \dots + m_l = k$$

(смешанные производные порядка  $k$ , по каждой координате не более первого порядка) в среднем степени  $p$  ( $p > 1$ ), ограниченные на  $X$  константой  $H_2$ .

Тогда найдется положительная константа  $H_3$  такая, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует натуральное число  $N(\varepsilon)$  такое, что при  $n > N(\varepsilon)$  выполнено

$$\mathbf{P} \left( \sup_{\mathbf{x} \in X} |Z_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| \leq \frac{H_3}{\sqrt{n}} \right) > 1 - \varepsilon, \quad (1.10.3)$$

т. е. метод зависимых испытаний имеет погрешность порядка  $n^{-1/2}$  (по вероятности).

Доказательство этого утверждения посвящены далее разд. 2.1–2.6. Потребуется сведения из теории случайных полей (в частности, понятие производной в среднем степени  $p, p > 1$  и др.). Будет показана слабая сходимость последовательности случайных полей

$$\Xi_n(\mathbf{x}) = \sqrt{n}(Z_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \tilde{\zeta}_j(\mathbf{x}) \quad (1.10.4)$$

к гауссовской непрерывной (а значит с вероятностью единица ограниченной на  $X$  константой  $H_3$ ) случайной функции  $\Xi(\mathbf{x})$ . Соответственно потребуются сведения из теории слабой (функциональной) сходимости последовательностей случайных полей.

**1.10.2. Получение верхней границы (по вероятности) для  $d^{(C)}$ .** Используя утверждение 1.10.1, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( d^{(C)} = \max_{i=1, \dots, M} |Z_n(\mathbf{x}_i) - \varphi(\mathbf{x}_i)| \leq \frac{H_3}{\sqrt{n}} \right) &\geq \\ &\geq \mathbf{P} \left( \sup_{\mathbf{x} \in X} |Z_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| \leq \frac{H_3}{\sqrt{n}} \right) > 1 - \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.10.5)$$

т. е. стохастическая компонента погрешности  $\delta_2^{(C)}$  имеет (независимо от числа узлов  $M$ ) порядок  $1/\sqrt{n}$ . Это отражает отмеченное выше преимущество использования зависимых оценок  $\{\zeta^{(i)}\}$  в узлах вместо независимых оценок, для которых величины  $d^{(C)}$  и  $\delta_2^{(C)}$  растут с увеличением числа узлов  $M$  как  $(\ln M)^{1/2}$  (см. разд. 1.9).

**1.10.3. Анализ условий утверждения 1.10.1.** Указанное преимущество получения приближенных значений  $\{\varphi(\mathbf{x}_i)\}$  по методу зависимых испытаний имеет место при выполнении условий (1.10.1) и (1.10.2). Условие (1.10.1) исследовано в подразд. 1.8.2, где требовалась непрерывность функций  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ,  $\hat{k}(x', x)$ ,  $\hat{f}(x)$  по параметрам  $\mathbf{x}$  и  $x$ . Условие (1.10.2), в свою очередь, выполнено, если эти же функции имеют непрерывные смешанные производные порядка  $k$ , по каждой координате не более первого порядка. Как указывалось выше, на практике такие требования непрерывности и гладкости часто не выполняются.

Отметим также, что «дифференциальное условие» (1.10.2) (см. далее разд. 2.4) можно ослабить. Например, используя то обстоятельство, что при слабой сходимости последовательности (1.10.4) предельная функция  $\Xi(\mathbf{x})$  – гауссовская, с помощью достаточно тонких предельных теорем для последовательностей случайных функций (в частности, теоремы Джейна–Маркуса) можно получить следующее (по-видимому, наиболее слабое) условие функциональной сходимости  $\{\Xi_n(\mathbf{x})\}$  к  $\Xi(\mathbf{x})$  в  $C(X)$ : *найдется  $a > 0$  и случайная величина  $\kappa > 0$  с конечным вторым моментом такие, что соотношение  $|\tilde{\zeta}(\mathbf{x}') - \tilde{\zeta}(\mathbf{x}'')| < \kappa \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|_l^a$  выполнено (с вероятностью единица) для всех  $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X$*  [13]; здесь  $\|\cdot\|_l$  – норма пространства  $R^l$ .

Кроме того, соотношения вида (1.10.3)

$$\mathbf{P} \left( \|Z_n - \varphi\|_{B(X)} \leq H_4 n^{-1/2} \right) > 1 - \varepsilon$$

можно получать для других (отличных от  $C(X)$ ) нормированных функциональных пространств  $B(X)$ , при этом несколько изменятся условия слабой сходимости  $\{\Xi_n(\mathbf{x})\}$  к  $\Xi(\mathbf{x})$ , а утверждение о непрерывности функционала  $F(z) = \|z\|_{B(X)}$  в пространстве  $B(X)$  доказывается аналогично утверждению 2.5.1 (см. далее разд. 2.5). Чаще всего рассматривается пространство  $B = C^p(X)$  (и его обобщенный аналог – пространства С. Л. Соболева  $W_2^p(X)$ ), так как метод зависимых испытаний весьма эффективен при приближении производных функции  $\varphi(\mathbf{x})$  по параметру  $\mathbf{x}$  или его компонентам [13, 32].

## 1.11. Общий вид погрешностей Д-СЧМ

**1.11.1. Погрешности Д-СЧМ для  $L_2$ - и  $C$ -подходов.** Суммируя соображения из разд. 1.2–1.10, можно получить следующие виды погрешностей  $L_2$ - и  $C$ -подходов для дискретно-стохастического алгоритма 1.1.1 с мультилинейным аппроксимационным базисом (1.3.2), (1.3.4) при согласованном стремлении параметров  $M$  и  $\bar{n}$  к бесконечности:

1) погрешность  $L_2$ -подхода для независимых оценок (1.5.1), (1.5.6) и зависимых оценок (1.6.1), (1.6.3) в узлах сетки  $X^{(M)}$ :

$$(\mathbf{E}\rho_{L_2}(\varphi, L_M\tilde{\varphi}))^2 \leq \frac{H_1}{M^{4/l}} + \frac{H_2}{\bar{n}}; \quad (1.11.1)$$

для метода зависимых испытаний  $\bar{n} = n$ ;

2) погрешность  $L_2$ -подхода для «слабо зависимых» оценок (1.7.2) в узлах сетки  $X^{(M)}$ :

$$(\mathbf{E}\rho_{L_2}(\varphi_2, L_M\tilde{\varphi}_2))^2 \leq \frac{H_1}{M^{4/l}} + \frac{H_2M}{n}; \quad (1.11.2)$$

3) погрешность  $C$ -подхода для независимых оценок (1.5.1), (1.5.6) в узлах сетки  $X^{(M)}$ :

$$\mathbf{P} \left\{ \rho_C(\varphi, L_M\tilde{\varphi}) \leq \frac{H_1}{M^{2/l}} + \frac{H_2(\varepsilon)}{\sqrt{\bar{n}}} (\sqrt{2 \ln M} + A(M, \varepsilon)) \right\} > 1 - \varepsilon; \quad (1.11.3)$$

здесь  $\varepsilon > 0$  и  $A(M, \varepsilon) \rightarrow 0$  при  $M \rightarrow \infty$  (конкретнее:  $A(M, \varepsilon) = (H_3(\varepsilon) - (\ln \ln M)/2)/\sqrt{2 \ln M}$ );

4) погрешность  $C$ -подхода для зависимых оценок (1.6.1), (1.6.3) в узлах сетки  $X^{(M)}$ :

$$\mathbf{P} \left\{ \rho_C(\varphi, L_M\tilde{\varphi}) \leq \frac{H_1}{M^{2/l}} + \frac{H_2(\varepsilon)}{\sqrt{\bar{n}}} \right\} > 1 - \varepsilon; \quad (1.11.4)$$

5) погрешность  $C$ -подхода для «слабо зависимых» оценок (1.7.2) в узлах сетки  $X^{(M)}$ :

$$\mathbf{P} \left\{ \rho_C(\varphi_2, L_M\tilde{\varphi}_2) \leq \frac{H_1}{M^{2/l}} + \frac{H_2(\varepsilon)M}{\sqrt{\bar{n}}} (\sqrt{2 \ln M} + A(M, \varepsilon)) \right\} > 1 - \varepsilon. \quad (1.11.5)$$

В соотношениях (1.11.1)–(1.11.5) буквами  $H_1, H_2$  и  $H_3$  обозначены различные константы.

**1.11.2. Условия сходимости Д-СЧМ.** Отметим, что условия выполнения соотношений (1.11.1)–(1.11.5) для интеграла  $\varphi_1(\mathbf{x})$ , зависящего от параметра, и решения  $\varphi_2(x)$  интегрального уравнения (1.1.4) удается выразить в терминах подынтегральной функции  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , ядра  $\hat{k}(x', x)$  и свободного члена  $\hat{f}(x)$  интегрального уравнения, а также плотностей  $(f_i(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}))$  для функции  $\varphi_1(\mathbf{x})$ ;  $\pi(x), \pi^*(x), p(x', x), p^*(x', x)$  – для функции  $\varphi_2(x)$ , определяющих стохастические оценки  $\zeta^{(i)}$  в узлах сетки  $X^{(M)}$ . Соответствующие теоремы сформулированы в [21, 22]. Здесь мы ограничимся двумя примерами утверждений о сходимости алгоритма 1.1.1 с мультилинейным аппроксимационным базисом (1.3.2), (1.3.4) для случаев зависимых оценок (1.6.1) и (1.6.3) в узлах сетки.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.11.1. Если  $f(\mathbf{x}') \geq \tau > 0$  при  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \neq 0$  и

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in C_{\mathbf{x}}^2(X) \times L_{\mathbf{x}'}(Y), \quad (1.11.6)$$

то существуют константы  $H_1$  и  $H_2(\varepsilon)$  и  $N(\varepsilon)$  такие, что для  $n > N(\varepsilon)$  выполнено соотношение (1.11.4) для интеграла, зависящего от параметра,  $\varphi = \varphi_1$ .

Условие (1.11.6) означает, что для функции  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  существуют всевозможные смешанные производные второго порядка, непрерывные по  $\mathbf{x}$  в  $X$  и интегрируемые по  $\mathbf{x}'$  в области  $Y$ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.11.2. Если выполнены соотношения

$$\hat{k}(x', x) \in C_x^2(X) \times C_{x'}(X), \quad \hat{f} \in C^2(X), \quad (1.11.7)$$

$$\sum_{m: |m| \leq 2} \max_{x \in X} \int_X |D_{(x)}^m \hat{k}(x', x)| dx' < 1, \quad (1.11.8)$$

а также условия (1.8.4)–(1.8.6) как для самих функций  $\hat{k}(x', x), \hat{f}(x)$ , так и для смешанных производных не более чем первого порядка по каждой компоненте переменной  $x$ , то существуют константы  $H_1$  и  $H_2(\varepsilon)$  и натуральное  $N(\varepsilon)$  такие, что для  $n > N(\varepsilon)$  выполнено соотношение (1.11.4) для решения интегрального уравнения (1.1.4)  $\varphi = \varphi_2$ .

Очередной раз отметим, что условия вида (1.11.6)–(1.11.8) достаточно редко выполняются на практике, что ограничивает применимость метода зависимых испытаний.

## 1.12. Условная оптимизация Д-СЧМ

**1.12.1. Задача условной оптимизации.** Вернемся к рассуждениям подразд. 1.1.4, в которых было отмечено, что при малом  $M$  и большом  $\bar{n}$  погрешность алгоритма 1.1.1 может оказаться значительной из-за наличия приближения (1.1.10). Наоборот, при большом  $M$  и малом  $\bar{n}$  погрешность также может быть немалой даже при хороших свойствах устойчивости приближения (1.1.10). Поэтому нужен согласованный выбор параметров  $M$  и  $\bar{n}$ , который можно осуществлять следующим образом.

Ставится *задача условной оптимизации* [21, 22]: найти минимум затрат

$$\min_{M, \bar{n}} s(M, \bar{n}) \quad (1.12.1)$$

при

$$T^{(B)}(M, \bar{n}) = \gamma, \quad (1.12.2)$$

где  $\gamma$  – фиксированное положительное число, а  $T^{(B)}$  – верхняя граница погрешности в норме функционального пространства  $B$ .

Выражения для функции  $s(M, \bar{n})$  имеют достаточно простой вид. Так, для Д-СЧМ с независимыми оценками (1.5.1) в узлах сетки имеем  $s(M, \bar{n}) = t_1 t_2 M \bar{n}$ , где  $t_1$  – затраты на моделирование вектора  $\xi_j^{(i)}$ , а  $t_2$  – время вычисления значения  $g(\mathbf{x}_i, \xi_j^{(i)})$ . Для алгоритма 1.1.1 с зависимыми оценками (1.6.1) в узлах сетки имеем  $s(M, n) = (t_1 + t_2 M)n$  (здесь  $\bar{n} = n$ ). Для простоты можно считать, что для достаточно больших  $M$  и  $\bar{n}$  выполнено

$$s(M, \bar{n}) = H_0 M \bar{n}, \quad H_0 = \text{const}. \quad (1.12.3)$$

Общая схема решения этой задачи такова: из соотношения (1.12.2) один из параметров (например,  $\bar{n}$ ) выражается через другой ( $M$ ) и соответствующее выражение подставляется в выражение (1.12.3), при этом получается функция  $\hat{s}(M)$  одного переменного ( $M$ ), которая и исследуется на минимум.

**1.12.2. Пример решения задачи условной оптимизации.** Рассмотрим задачу (1.12.1)–(1.12.3) для алгоритма 1.1.1 с зависимыми оценками в узлах сетки и для  $C$ -подхода (здесь  $\bar{n} = n$ ). Согласно соотношению (1.11.4), имеем уравнение:

$$T^{(C)}(M, n) = \frac{H_1}{M^{2/l}} + \frac{H_2}{\sqrt{n}} = \gamma. \quad (1.12.4)$$



Тогда

$$n = \frac{H_2^2}{\left(\gamma - \frac{H_1}{M^{2/l}}\right)^2} \quad (1.12.5)$$

и требуется найти минимум функции

$$\hat{s}(M) = \frac{H_0 H_2^2 M}{\left(\gamma - \frac{H_1}{M^{2/l}}\right)^2}. \quad (1.12.6)$$

Найдем производную:

$$\begin{aligned} \hat{s}'(M) &= H_0 H_2^2 \frac{\left(\gamma - \frac{H_1}{M^{2/l}}\right)^2 - M \times 2 \left(\gamma - \frac{H_1}{M^{2/l}}\right)^4 \times \frac{2H_1}{l} \frac{1}{M^{2/l+1}}}{\left(\gamma - \frac{H_1}{M^{2/l}}\right)^4} = \\ &= H_0 H_2^2 \frac{\gamma - \frac{H_1}{M^{2/l}} - \frac{4}{l} \times \frac{H_1}{M^{2/l}}}{\left(\gamma - \frac{H_1}{M^{2/l}}\right)^3} = \frac{H_0 H_2^2}{\left(\gamma - \frac{H_1}{M^{2/l}}\right)^3} \left(\gamma - \frac{H_1}{M^{2/l}} \left(\frac{l+4}{l}\right)\right). \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю производную  $\hat{s}'(M)$ , получаем уравнение

$$\gamma = \frac{H_1}{M^{2/l}} \left(\frac{l+4}{l}\right),$$

из которого (с учетом соотношений (1.12.5), (1.12.6)) выводим выражения для условно-оптимальных параметров:

$$\begin{aligned} M_{opt} &= \left(\frac{H_1(l+4)}{l}\right)^{l/2} \gamma^{-l/2}; \quad n_{opt} = \frac{(H_2(l+4))^2}{16} \gamma^{-2}; \\ s_{opt} &= \frac{H_0 H_1^{l/2} H_2^2 (l+4)^{2+l/2}}{16^{l/2}} \gamma^{-2-l/2}. \end{aligned}$$

Заметим, что если нас интересует только порядок по  $\gamma$  оптимальных параметров  $M_{opt}$  и  $n_{opt}$ , т. е. соотношения вида

$$M_{opt} \asymp \gamma^{-l/2}, \quad n_{opt} \asymp \gamma^{-2}, \quad s_{opt} \asymp \gamma^{-2-l/2},$$

и затраты  $s$  пропорциональны произведению  $Mn$  (см. соотношение (1.12.3)), то достаточно приравнять детерминированную и стохастическую компоненты погрешности и получить требуемый порядок из соотношения (1.12.4).

Отметим также, что в [21, 22] задача (1.12.1)–(1.12.3) решена для верхних границ погрешностей вида (1.11.1)–(1.11.5).

**1.12.3. Задача полной оптимизации.** Как было отмечено выше в подразд. 1.1.4, помимо параметров  $M$  и  $\bar{n}$  при построении алгоритма 1.1.1 для интеграла, зависящего от параметра,  $\varphi_1(\mathbf{x})$  из (1.1.8) и решения  $\varphi_2(x)$  интегрального уравнения (1.1.4) имеется возможность выбора плотностей распределений  $\mathbf{f}$ , где  $\mathbf{f} = f(\mathbf{x}') \vee \{f_i(\mathbf{x}')\}$  для функции  $\varphi_1(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{f} = \{\pi(x), p(x', x)\} \vee \{\pi_i^*(x), p_i^*(x', x)\}$  для  $\varphi_2(x)$ . Задачу совместного оптимального выбора  $M, \bar{n}, \mathbf{f}$  назовем *задачей полной оптимизации*.

Рассмотрим проблему выбора оптимальных плотностей  $f(\mathbf{x}), \pi(x), p(x', x)$  для метода зависимых испытаний (1.6.1), (1.6.3). Имеется определенная трудность определения того, что следует считать критерием (т. е. какую величину следует минимизировать) при определении оптимальных плотностей. По аналогии со случаем одновременной оценки многих интегралов (см., например, гл. 5 в [16]) можно предложить минимизировать функционал со «взвешенной дисперсией»:

$$\begin{aligned} S &= t \int_X \mathbf{D}\zeta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = t \int_X \mathbf{E}(\zeta(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} = t \mathbf{E} \int_X (\zeta(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} = \\ &= t \mathbf{E} \|\zeta - \varphi\|_{L_2(X)}^2 = tn \mathbf{E} \|Z_n - \varphi\|_{L_2(X)}^2; \end{aligned} \quad (1.12.6)$$

здесь использован вероятностный вариант теоремы Фубини о перестановке операций интегрирования и взятия математического ожидания. В соотношении (1.12.6) величина  $t$  обозначает время подсчета значения  $\zeta(\mathbf{x}_i)$  или  $\xi(\mathbf{x}_i)$  (см. формулы (1.6.1), (1.6.3)). В частности, для функции  $\varphi_1(\mathbf{x})$  имеем  $t = t_1 + t_2$ .

Отметим, что в работе [13] исследован вопрос о выборе оптимальных плотностей метода зависимых испытаний для случая принадлежности функций  $\varphi(\mathbf{x})$  и  $Z_n(\mathbf{x})$  другим (отличным от  $L_2(X)$ ) нормированным функциональным пространствам  $B(X)$ . При этом по аналогии с (1.2.6) минимизируется «функционал трудоемкости»:

$$S = tn \mathbf{E} \|Z_n - \varphi\|_{B(X)}^2.$$

Для интеграла, зависящего от параметра, (1.6.1) минимум величины (1.12.6) дает плотность:

$$f_{opt}(\mathbf{x}') = \frac{\|g(\cdot, \mathbf{x}')\|_{L_2(X)}}{\int \|g(\cdot, \mathbf{x}')\|_{L_2(X)} d\mathbf{x}'}. \quad (1.12.7)$$

Такой же вид оптимальной плотности (с точностью до замены  $L_2(X)$  на  $W_2^p(X)$ ) получается для соболевских пространств  $W_2^p(X)$  [13].

Для функции  $\varphi_2(x)$  минимум величины (1.12.6) дают плотности:

$$\pi_{opt}(x) = \frac{\hat{f}(x)\tau(x)}{\int \hat{f}(y)\tau(y) dy}; \quad p_{opt}(x', x) = \frac{\hat{k}(x', x)\tau(x)}{\int \hat{k}(x', y)\tau(y) dy},$$

где функция  $\tau(x)$  является решением уравнения

$$\tau^2(x) = \left( \int \hat{k}(x, y)\tau(y) dy \right)^2 + \int \hat{k}(y, x)[2\varphi_2^{*(x)}(y) - \hat{k}(y, x)] dy,$$

а функция  $\varphi_2^{*(x)}(y)$  является решением уравнения (1.8.9).

Прямое использование оптимальных плотностей затруднительно. Возможно кусочно-полиномиальное приближение функций  $f_{opt}(\mathbf{x}')$ ,  $\pi_{opt}(x)$  и  $p_{opt}(x', x)$  с последующим использованием алгоритмов метода суперпозиции [24, 25].

## ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

### 2.1. Основные понятия теории случайных процессов и полей

**2.1.1. О содержании главы 2.** В этой главе будет обоснован метод зависимых испытаний, т. е. доказано утверждение 1.10.1. Для этого потребуются изучить основы теории слабой (функциональной) сходимости последовательностей случайных функций. Эта теория будет также использована при изучении аппроксимационных свойств численных спектральных моделей однородных гауссовских случайных полей. Будет описана новая возможность использования спектральных моделей – тестирование алгоритмов численного (в том числе параметрического) интегрирования.

**2.1.2. Выборочное вероятностное пространство случайной функции.** Трудности изучения и использования теории случайных процессов и полей связаны, прежде всего, с тем обстоятельством, что само

понятие *случайной функции* является во многом более сложным для изучения математическим объектом, чем понятие *случайной величины*. Здесь уместно сравнение понятий «*функция*» и «*вещественное число*» (в смысле объема и сложности изучения) в «обычном» (нестохастическом) математическом анализе.

Традиционные (неспециализированные) курсы теории вероятностей посвящены, как правило, изучению только случайных величин. В связи с этим нам необходимо ввести начальные понятия теории случайных процессов и полей [35, 36].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1.** *Случайной функцией* называется семейство случайных величин  $\xi(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}, \omega)$ , заданных на одном вероятностном пространстве  $\Omega \subseteq R^s$  (как правило,  $s = 1$ ) с  $\sigma$ -алгеброй  $A$  точечных или борелевских множеств из  $R^s$  и мерой  $\mathbf{P}(A)$ ,  $A \subseteq \Omega$  и зависящих от параметра  $\mathbf{x}$ , принимающего значения из некоторого множества  $X$ . Если  $X$  есть счетное множество в  $R$ , то  $\xi(x)$  – *случайный процесс с дискретным временем* (примерами таких процессов служат *случайные последовательности, цепи Маркова, мартингаллы* и др.), а если  $X = (a, b) \subseteq R$ , то  $\xi(x)$  – *случайный процесс с непрерывным временем*. Если  $X$  является подмножеством  $R^l$ , то  $\xi(\mathbf{x})$  называют *случайным полем размерности  $l$* .

В дальнейшем для случайных процессов и полей с непрерывным временем в качестве  $X$  будем рассматривать выпуклую ограниченную область с границей в  $R^l$  (для процессов это просто отрезок  $[a, b]$ ). Отметим также, что если значения  $\xi(\mathbf{x})$  принадлежат  $R^s$  при  $s > 1$ , то ко всем введенным понятиям добавляется прилагательное «*векторный*» (*векторный случайный процесс, векторное случайное поле* и т. п.) и используется обозначение  $\xi(\mathbf{x})$ .

Если зафиксировать  $\omega_0 \in \Omega$ , то мы получаем неслучайную функцию  $\xi(\mathbf{x}, \omega_0) = \xi_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in X$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.2.** *Функция  $\xi_0(\mathbf{x})$  называется траекторией, или выборочной функцией, или реализацией случайной функции.*

Таким образом, в роли случайных величин выступают функции. Рассмотрим пространство  $Z(X)$  функций  $z(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in X$ , в котором с вероятностью единица лежат траектории случайной функции  $\xi(\mathbf{x})$ . Обозначим через  $A_Z$   $\sigma$ -алгебру подмножеств из  $Z(X)$ , порожденную (с помощью операций объединения и пересечения) так называемыми *цилиндрическими множествами* вида

$$A = \{z(\mathbf{x}) \in Z : z(\mathbf{x}_1) \in Y_1, \dots, z(\mathbf{x}_n) \in Y_n\}$$

для всевозможных значений  $n$  и  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  из  $X$  и борелевских множеств  $Y_1, \dots, Y_n$  из  $R$ . Если случайная функция  $\xi(\mathbf{x}, \omega)$  задана, то она определяет измеримое отображение пространства  $\Omega$  с  $\sigma$ -алгеброй  $\dot{A}$  в пространство  $Z(X)$  с  $\sigma$ -алгеброй  $\dot{A}_Z$ , так как, очевидно,  $\xi^{-1}(A) = \{\omega : \xi(\mathbf{x}, \omega) \in A\} \in \dot{A}$  для любого цилиндрического множества  $A$ , и поэтому  $\xi^{-1}(B) \in \dot{A}$  для любого  $B \in \dot{A}_Z$ . Это отображение индуцирует *распределение случайной функции*  $\mathbf{P}_\xi(B)$  на  $Z(X)$ , определяемое равенствами  $\mathbf{P}_\xi(B) = \mathbf{P}(\xi^{-1}(B))$  для всевозможных  $B \in \dot{A}_Z$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.3.** *Пространство  $Z(X)$  с  $\sigma$ -алгеброй  $\dot{A}_Z$  и мерой  $\mathbf{P}_\xi(B)$  называется **выборочным вероятностным пространством**.*

Еще раз подчеркнем, что элементарный исход « $\tilde{\omega}$ » для выборочного вероятностного пространства отождествляется с траекторией процесса; не следует путать его с элементом  $\omega$  из пространства элементарных событий  $\Omega$ , которому принадлежит значение случайной величины  $\xi(\mathbf{x}_0)$  для фиксированного  $\mathbf{x}_0$ .

Для случайных функций с непрерывным временем в качестве  $Z(X)$  мы будем рассматривать в основном пространство  $C(X)$ . Это множество непрерывных на  $X$  функций, причем  $\sigma$ -алгебра  $\dot{A}_C$  совпадает в этом пространстве с  $\sigma$ -алгеброй, порожденной множествами, открытыми относительно равномерной метрики

$$\rho_C(z_1, z_2) = \sup_{\mathbf{x} \in X} |z_1(\mathbf{x}) - z_2(\mathbf{x})|, \quad z_1, z_2 \in C(X).$$

**2.1.3. Конечномерные распределения случайной функции. Функция математических ожиданий. Корреляционная функция. Гауссовское случайное поле.** При определении и моделировании случайных функций важным является следующее понятие. Если при рассмотрении случайной функции  $\xi(\mathbf{x})$  зафиксировать значения  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K$  из  $X$ , то мы получим конечномерную случайную величину (случайный вектор)  $(\xi(\mathbf{x}_1), \dots, \xi(\mathbf{x}_K))$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.4.** *Распределения величин  $(\xi(\mathbf{x}_1), \dots, \xi(\mathbf{x}_K))$  для различных  $K$  и различных наборов  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K$  называют **конечномерными распределениями** случайной функции.*

Случайная функция, как правило, задается своими конечномерными распределениями. При этом они должны удовлетворять специальным *условиям согласованности* [35, 36]. Кроме того, следует учитывать, что если не дается дополнительной информации о свойствах траекторий функции, то данный набор конечномерных распределений задает целый

класс *стохастически эквивалентных* случайных функций. Однако если потребовать, чтобы траектории случайной функции принадлежали пространству  $C(X)$ , то конечномерные распределения определяют случайную функцию однозначно.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.5.** Функция  $m(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\xi(\mathbf{x})$  называется **функцией математического ожидания** случайной функции, а функция двух переменных

$$R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{E}(\xi(\mathbf{x}_1) - m(\mathbf{x}_1)) (\xi(\mathbf{x}_2) - m(\mathbf{x}_2)) \quad - \quad (2.1.1)$$

**корреляционной функцией.** Для комплекснозначных функций  $\xi(\mathbf{x})$  эта функция имеет вид

$$R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{E}(\xi(\mathbf{x}_1) - m(\mathbf{x}_1)) (\xi(\mathbf{x}_2) - m(\mathbf{x}_2))^*, \quad (2.1.2)$$

где знак «\*» обозначает комплексное сопряжение. Функция  $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  называется **функцией дисперсии** случайной функции.

В некоторых работах функция вида (2.1.1) (или (2.1.2)) называется *автокорреляционной функцией, ковариационной функцией, автоковариационной функцией.*

Функции  $m(\mathbf{x})$  и  $R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  являются усредненными характеристиками одномерных и двумерных распределений и, вообще говоря, полностью не задают случайную функцию. Имеется один важный частный случай, когда функции  $m(\mathbf{x})$  и  $R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  полностью определяют случайное поле  $\xi(\mathbf{x})$  (случайный процесс  $\xi(x)$ ).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.6.** Действительное случайное поле (процесс) называется **гауссовским**, если все его согласованные конечномерные распределения являются гауссовскими. Комплекснозначное случайное поле  $\xi(\mathbf{x}) = \xi_1(\mathbf{x}) + i\xi_2(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in R^l$  называется **гауссовским**, если пара  $(\xi_1(\mathbf{x}), \xi_2(\mathbf{x}))$  образует действительное двумерное гауссовское поле.

На практике во многих случаях имеется информация только о функции математического ожидания и корреляционной функции изучаемого случайного поля. Поэтому достаточно часто делается предположение о гауссовости этого поля. В связи с этим в литературе по численному статистическому моделированию особое внимание уделяется построению моделей именно гауссовских случайных функций (см. далее разд. 2.10–2.12 и монографии [8, 13, 16]). Важным аргументом в пользу использования гауссовских случайных моделей является возможность применения центральной предельной теоремы при изучении сходимости конечномерных распределений конструируемых моделей (см. далее подразд. 2.11.1).

**2.1.4. Стационарность случайного процесса. Однородность случайного поля.** Сформулируем еще одно важное понятие.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.7.** Случайный процесс  $\xi(x)$ ,  $x \in R$  называется **стационарным (в узком смысле)**, если при любых  $K$  и  $x_1, \dots, x_K$  из  $X$  распределение многомерной случайной величины  $(\xi(x_1 + u), \dots, \xi(x_K + u))$  не зависит от  $u$ . При этом  $m(x) = \text{const}$ , а корреляционная функция  $R(x_1, x_2) \equiv R(u)$  зависит только от разности  $u = x_1 - x_2$ . Последние два свойства определяют **стационарность в широком смысле** случайных процессов и полей, причем для полей вместо термина «стационарность в широком смысле» используют термин **однородность**.

Большую роль (сравнимую с теорией гильбертовых пространств в «обычном» – нестохастическом – функциональном анализе) играет так называемая *корреляционная теория стационарных (в широком смысле) случайных функций*. Основы этой теории изложены далее в разд. 2.8, 2.9 в связи с исследованием в разд. 2.10–2.12 численных моделей однородных гауссовских случайных полей.

## 2.2. Основы общей теории слабой сходимости последовательностей случайных полей

**2.2.1. Сходимость конечномерных распределений. Сходимость в среднем.** В теории численного статистического моделирования многие конструкции представляют собой последовательности случайных процессов и полей  $\{\xi_n(\mathbf{x})\}$ , определенных на одном вероятностном пространстве, для которых требуемые свойства выполняются асимптотически при  $n \rightarrow \infty$ . Существуют разные виды вероятностной сходимости последовательностей случайных функций [35–37].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.1.** Говорят, что **конечномерные распределения последовательности  $\{\xi_n(\mathbf{x})\}$  сходятся к конечномерным распределениям случайной функции  $\xi(\mathbf{x})$** , если для любого  $K$  и любого набора точек  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K\}$  функция распределения

$$F_{\xi_n}^{(K)}(\mathbf{y}) = F_{\xi_n}^{(K)}(y_1, \dots, y_K) = \mathbf{P}\{\xi_n(\mathbf{x}_1) < y_1, \dots, \xi_n(\mathbf{x}_K) < y_K\}$$

сходится к функции  $F_{\xi}^{(K)}(\mathbf{y})$  в каждой точке  $\mathbf{y}$ , где функция  $F_{\xi}^{(K)}(\mathbf{y})$  непрерывна.

Сформулированное определение эквивалентно тому, что для любой

ограниченной непрерывной функции  $K$  переменных  $f(\mathbf{v})$  выполнено

$$\mathbf{E}f(\xi_n(\mathbf{x}_1), \dots, \xi_n(\mathbf{x}_K)) \rightarrow \mathbf{E}f(\xi(\mathbf{x}_1), \dots, \xi(\mathbf{x}_K)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty; \quad (2.2.1)$$

последнее соотношение часто принимается за определение сходимости конечномерных распределений.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.2.** *Говорят, что последовательность  $\{\xi_n(\mathbf{x})\}$  сходится (поточечно) к случайной функции  $\xi(\mathbf{x})$  в среднем степени  $p$ ,  $0 < p < \infty$ , если для любого  $\mathbf{x} \in X$  выполнено соотношение*

$$\mathbf{E}|\xi_n(\mathbf{x}) - \xi(\mathbf{x})|^p \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.2.2)$$

В классическом функциональном анализе этот вид сходимости называют *сходимостью в  $L_p(X)$* . При  $p = 2$  эту сходимость называют также *сходимостью в среднеквадратическом* и пишут  $\xi(\mathbf{x}) = \text{l.i.m. } \xi_n(\mathbf{x})$  (здесь l.i.m. – сокращение от *limit in mean* – «сходимость в среднем»). Отметим также, что определение 2.2.2 используется, как правило, для  $p \geq 1$  в силу того, что для этого случая функциональное (вероятностное) пространство  $L_p(X)$  является *полным*, т. е. всякая фундаментальная последовательность является сходящейся [38].

**2.2.2. Функциональная (слабая) сходимость в  $Z(X)$ : общий критерий.** В приложениях метода Монте-Карло случайная функция  $\xi(\mathbf{x})$ , как правило, входит в описание моделируемого реального процесса таким образом, что в конечном итоге требуется исследовать вероятностные характеристики случайных величин  $\{\Phi(\xi)\}$  для некоторого набора функционалов  $\{\Phi\}$ . При использовании вместо функции  $\xi(\mathbf{x})$  ее численной модели  $\xi_n(\mathbf{x})$  важна *функциональная сходимость* последовательности  $\{\xi_n(\mathbf{x})\}$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. сходимость распределений последовательностей  $\{\Phi(\xi_n)\}$  к  $\{\Phi(\xi)\}$ . Забегая вперед, можно отметить, что «поточечных» сходимостей вида (2.2.1), (2.2.2) здесь не достаточно.

Введем более точные понятия, критерии и условия [32, 35–37]. Рассмотрим последовательность случайных функций  $\{\xi_n(\mathbf{x})\}$ , почти все траектории которых лежат в функциональном пространстве  $Z(X)$  с метрикой  $\rho_Z$  (обозначение  $\xi_n \in Z(X)$ ). Везде далее полагаем, что  $\mathbf{x} \in X$ , где  $X$  – выпуклая ограниченная область с границей в  $R^l$ .

Пусть на  $Z(X)$  определен класс функционалов

$$\Phi \subset \{\Phi : Z(X) \rightarrow R, \Phi \text{ измеримо относительно } \dot{A}_Z\}.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.3.** *Говорят, что последовательность случайных функций  $\{\xi_n(\mathbf{x})\}$   $\Phi$ -сходится в  $Z(X)$  к  $\xi(\mathbf{x})$ , если для всех  $\Phi$  из*



$\Phi$  и  $y$  из  $R$  выполнено

$$\mathbf{P}_{\xi_n}(\{z \in Z(X) : \Phi(z) < y\}) \rightarrow \mathbf{P}_\xi(\{z \in Z(X) : \Phi(z) < y\}) \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2.2.3)$$

Здесь  $\mathbf{P}_\xi(B)$  – распределение случайной функции  $\xi(\mathbf{x})$  на  $Z(X)$  – см. определение 2.1.3.

Далее будем рассматривать следующий частный случай.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.4.** *Говорят, что последовательность  $\{\xi_n(\mathbf{x})\}$  слабо сходится в  $Z(X)$  к  $\xi(\mathbf{x})$ , если  $\Phi$  – множество всех непрерывных ограниченных в метрике  $\rho_Z$  функционалов и выполнено условие (2.2.3) для всех  $\Phi \in \Phi$  и  $y \in R$ .*

Здесь уместно заметить, что в дальнейшем понятия *слабой* и *функциональной* сходимости в  $Z(X)$  считаются эквивалентными.

Для всякого непрерывного ограниченного функционала  $\Phi$  выполняется соотношение  $\mathbf{E} \Phi(\xi_n) = \int_{Z(X)} \Phi(z) \mathbf{P}_{\xi_n}(dz)$ . Для сходимости распределений  $\Phi(\xi_n)$  к распределениям  $\Phi(\xi)$  при  $n \rightarrow \infty$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Z(X)} \Phi(z) \mathbf{P}_{\xi_n}(dz) = \int_{Z(X)} \Phi(z) \mathbf{P}_\xi(dz). \quad (2.2.4)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.5.** *Говорят, что последовательность вероятностных мер  $\{\mathbf{P}_{\xi_n}\}$  слабо сходится в  $Z(X)$  к мере  $\mathbf{P}_\xi$ , если для всех непрерывных ограниченных функционалов  $\Phi$  выполнено соотношение (2.2.4).*

Таким образом, слабая сходимость последовательности случайных функций эквивалентна слабой сходимости соответствующей последовательности мер. Введем еще одно вспомогательное понятие.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.6.** *Последовательность мер  $\{\mathbf{P}_{\xi_n}\}$  называется слабо компактной, если из всякой ее подпоследовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.*

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2.1** (общий критерий слабой сходимости в  $Z(X)$ ). *Для того чтобы последовательность мер  $\{\mathbf{P}_{\xi_n}\}$  слабо сходилась к мере  $\mathbf{P}_\xi$ , необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

а) существует алгебра  $\tilde{A}_Z$  такая, что  $\sigma(\tilde{A}_Z) = \dot{A}_Z$  (т. е.  $\sigma$ -алгебра, порожденная алгеброй  $\tilde{A}_Z$ , совпадает с  $\dot{A}_Z$ ), и для всех  $B \in \tilde{A}_Z$  выполнено  $\mathbf{P}_{\xi_n}(B) \rightarrow \mathbf{P}_\xi(B)$  при  $n \rightarrow \infty$ ;

б) последовательность  $\{\mathbf{P}_{\xi_n}\}$  слабо компактна.

В дальнейшем условие *a* утверждения 2.2.1 будем называть *условием сходимости на алгебре*, а условие *б* утверждения 2.2.1 – *условием слабой компактности*.

### 2.3. Условия слабой сходимости в $C(X)$

**2.3.1. Условие сходимости на алгебре в пространстве  $C(X)$ .** Достаточно абстрактные условия утверждения 2.2.1 для случая  $Z(X) = C(X)$  можно существенно упростить, используя в первую очередь то обстоятельство, что это пространство является *полным сепарабельным пространством* [38], и поэтому минимальная  $\sigma$ -алгебра  $\dot{A}_C$ , содержащая все цилиндрические множества, содержит все борелевские множества. Из этого следует, что условие сходимости на алгебре для пространства  $C(X)$  можно переписать в виде

*Конечномерные распределения случайных функций  $\xi_n(\mathbf{x})$  сходятся к конечномерным распределениям функции  $\xi(\mathbf{x})$  при  $n \rightarrow \infty$ .* (2.3.1)

**2.3.2. Критерий слабой сходимости в пространстве  $C(X)$ .** Справедливо следующее

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3.1.** Пусть  $Z(X)$  – полное сепарабельное пространство и  $\dot{A}_Z$  –  $\sigma$ -алгебра борелевских множеств. Для того чтобы последовательность вероятностных мер  $\{\mathbf{P}_{\xi_n}\}$  на  $\dot{A}_Z$  была слабо компактной, необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  нашелся компакт  $K \subset Z(X)$  такой, что  $\sup_n \mathbf{P}_{\xi_n}(Z(X) \setminus K) < \varepsilon$ .

Введем модуль непрерывности в  $C(X)$ :

$$\delta_h(z) = \sup_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X: \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_l < h} |z(\mathbf{x}_2) - z(\mathbf{x}_1)|, \quad z \in C(X),$$

где  $\|\cdot\|_l$  – норма в  $R^l$ :  $\|\mathbf{x}\|_l = \sqrt{(x^{(1)})^2 + \dots + (x^{(l)})^2}$ . Из теоремы Арцела [38] следует

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3.2.** Пусть  $H$  – неотрицательное число,  $s(h)$  – неубывающая неотрицательная функция одного переменного, определенная при  $h > 0$ , такая, что  $\lim_{h \downarrow 0} s(h) = 0$ , и пусть  $\tilde{K}(H, s(h))$  – множество функций  $z(\mathbf{x})$ , принадлежащих  $C(X)$  и удовлетворяющих условиям:  $\sup_{\mathbf{x} \in X} |z(\mathbf{x})| \leq H$  и для любого  $h > 0$  выполнено  $\delta_h(z) \leq s(h)$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

а) для любых  $H$  и  $s(h)$  множества  $\tilde{K}(H, s(h))$  компактны в  $C(X)$ ;

б) для любого компакта  $K_0$  в  $C(X)$  существуют константа  $H$  и функция  $s(h)$  такие, что  $K_0$  является замкнутым подмножеством множества  $\bar{K}(H, s(h))$ .

Из утверждений 2.2.1, 2.3.1, 2.3.2 получаем

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3.3** (критерий слабой сходимости в  $C(X)$ ). Пусть  $\xi_n(\mathbf{x}) \in C(X)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Для слабой сходимости последовательности  $\{\xi_n(\mathbf{x})\}$  к  $\xi(\mathbf{x})$  необходимо и достаточно, чтобы одновременно были выполнены условия (2.3.1) и

$$\lim_{h \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\delta_h(\xi_n) > \varepsilon) = 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \quad (2.3.2)$$

**2.3.3. Условия функциональной сходимости в  $C(X)$  в терминах приращений.** Условие (2.3.2) часто сложно проверить, и для приложений удобнее использовать более ограничительные, но простые условия, из которых следует (2.3.2).

Введем следующее обозначение:

$$\Delta^{\mathbf{h}} \xi(\mathbf{x}) = \Delta_1^{h^{(1)}} (\Delta_2^{h^{(2)}} (\dots (\Delta_l^{h^{(l)}} \xi(x^{(1)}, \dots, x^{(l)})) \dots)) -$$

смешанная разность по всем координатам, здесь

$$\Delta_i^{h^{(i)}} \xi(x^{(1)}, \dots, x^{(l)}) = \xi(x^{(1)}, \dots, x^{(i)} + h^{(i)}, \dots, x^{(l)}) - \xi(x^{(1)}, \dots, x^{(l)}), \quad (2.3.3)$$

$\mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(l)})$ ,  $\mathbf{h} = (h^{(1)}, \dots, h^{(l)})$ ,  $\mathbf{t} + \mathbf{h} \in X$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3.4** (условия слабой сходимости в  $C(X)$  в терминах приращений). Если для последовательности  $\{\xi_n(\mathbf{x})\}$  выполнено условие (2.3.1) и, кроме того, существуют положительные числа  $p, r$  и  $H$  такие, что для любых  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{h}$ , где  $\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{h} \in X$ , и  $n = 1, 2, \dots$  выполнено

$$\mathbf{E} |\Delta^{\mathbf{h}} \xi_n(\mathbf{x})|^p \leq H \left| \prod_{j=1}^l h^{(j)} \right|^{1+r}, \quad (2.3.4)$$

то  $\xi_n \in C(X)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  (т. е. функции  $\xi_n$  выборочно непрерывны) и последовательность  $\{\xi_n(\mathbf{x})\}$  слабо сходится к  $\xi(\mathbf{x})$ .

В случае  $h^{(j)} = 0$  разность (2.3.3) по  $j$ -й координате в  $\Delta^{\mathbf{h}} \xi_n(\mathbf{x})$  не берется и нулевое  $h^{(j)}$  отсутствует в правой части (2.3.4). В частности, при  $h^{(1)} = \dots = h^{(l)} = 0$  выполнено  $\mathbf{E} |\xi_n(\mathbf{x})|^p < H$  для всех  $\mathbf{x} \in X$ .

## 2.4. Дифференциальные условия слабой компактности в $C(X)$

**2.4.1. Стохастический функциональный анализ «в среднем степени  $p$ ».** Дальнейшее упрощение условий слабой компактности в  $C(X)$  связано с переходом от условия в терминах приращений (2.3.4) к так называемым *дифференциальным* и *моментным* условиям (см. далее подразд. 2.4.2 и разд. 2.9). Здесь для случайных функций нужно строить «математический анализ в среднем степени  $p$ ,  $p > 1$ », используя «модуль»  $\mathbf{E}|\xi|^p$  в области значений случайной функции вместо обычного модуля для неслучайных функций. Наиболее распространенный случай – «математический анализ в среднеквадратическом» – для  $p = 2$ . Сформулируем соответствующие вероятностные аналоги понятий и утверждений классического математического анализа.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.1.** Случайная функция  $\varphi(x^{(1)}, \dots, x^{(l)})$  называется *производной случайной функции*  $\xi(x^{(1)}, \dots, x^{(l)})$  по  $i$ -й координате в среднем степени  $p$ ,  $p > 1$  и обозначается как:

$$\varphi(x^{(1)}, \dots, x^{(l)}) = \frac{\partial \xi(x^{(1)}, \dots, x^{(l)})}{\partial x^{(i)}},$$

если  $\mathbf{E}|\Delta_i^{h^{(i)}} \xi(x^{(1)}, \dots, x^{(l)})/h^{(i)} - \varphi(x^{(1)}, \dots, x^{(l)})|^p \rightarrow 0$  при  $h^{(i)} \rightarrow 0$ . *Смешанная производная случайной функции  $\xi$  в среднем степени  $p$ ,  $p > 1$ , определяется рекуррентно:*

$$\frac{\partial^l \xi(x^{(1)}, \dots, x^{(l)})}{\partial x^{(1)} \dots \partial x^{(l)}} = \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} \left( \frac{\partial}{\partial x^{(2)}} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x^{(l)}} \xi(x^{(1)}, \dots, x^{(l)}) \right) \dots \right).$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4.1** (формула Ньютона–Лейбница для случайных процессов). Если у случайного процесса  $\xi(x)$ ,  $x \in [a, b] \subset R$  существует непрерывная производная  $\partial \xi(x)/\partial x$  в среднем степени  $p$ ,  $p > 1$ , для всех  $x \in (a, b)$ , то существует интеграл  $\int_a^b (\partial \xi(x)/\partial x) dx$  в среднем степени  $p$  и

$$\xi(b) - \xi(a) = \int_a^b \frac{\partial \xi(x)}{\partial x} dx; \quad (2.4.1)$$

здесь равенство понимается в среднем степени  $p$ :

$$\mathbf{E} \left| (\xi(b) - \xi(a)) - \int_a^b \frac{\partial \xi(x)}{\partial x} dx \right|^p = 0.$$

**2.4.2. Дифференциальные условия.** Докажем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4.2. Пусть при  $p > 1$  случайные функции  $\xi_n(\mathbf{x})$ ,  $n = 1, 2, \dots$  непрерывны на множестве  $X$  в среднем степени  $p$  и для любого  $k : 1 \leq k \leq l$  существуют производные

$$D_{m_1 \dots m_l} \xi_n(\mathbf{x}) = \frac{\partial^k \xi_n(x^{(1)}, \dots, x^{(l)})}{\partial (x^{(1)})^{m_1} \dots \partial (x^{(l)})^{m_l}}, \quad m_i = 0 \text{ или } m_i = 1, \quad m_1 + \dots + m_l = k$$

(смешанные производные порядка  $k$ , по каждой координате не более первого порядка) в среднем степени  $p$ , ограниченные на  $X$  константой  $H$ , не зависящей от  $n$ . Тогда, если выполнено условие (2.3.1), то последовательность  $\{\xi_n(\mathbf{x})\}$  слабо сходится к  $\xi(\mathbf{x})$  в  $C(X)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что из условий утверждения 2.4.2 следует выполнение условия (2.3.4) утверждения 2.3.4. Не ограничивая общности, можно считать, что в смешанной разности  $\Delta^{\mathbf{h}} \xi_n(\mathbf{x})$  все  $h^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, l$  положительны (если, например,  $h^{(i)} = 0$ , то все представленные ниже рассуждения проводятся для  $\xi_n$ , как функции переменных  $x^{(1)}, \dots, x^{(i-1)}, x^{(i+1)}, \dots, x^{(l)}$ ).

Применяя соотношение (2.4.1) из утверждения 2.4.1  $l$  раз, последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_1^{h^{(1)}} \xi_n(x^{(1)}, \dots, x^{(l)}) &= \int_{x^{(1)}}^{x^{(1)}+h^{(1)}} \frac{\partial \xi_n(s^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(l)})}{\partial s^{(1)}} ds^{(1)}; \\ \Delta_2^{h^{(2)}} (\Delta_1^{h^{(1)}} \xi_n(x^{(1)}, \dots, x^{(l)})) &= \Delta_2^{h^{(2)}} \left( \int_{x^{(1)}}^{x^{(1)}+h^{(1)}} \frac{\partial \xi_n(s^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(l)})}{\partial s^{(1)}} ds^{(1)} \right) = \\ &= \int_{x^{(1)}}^{x^{(1)}+h^{(1)}} \int_{x^{(2)}}^{x^{(2)}+h^{(2)}} \frac{\partial^2 \xi_n(s^{(1)}, s^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(l)})}{\partial s^{(1)} \partial s^{(2)}} ds^{(1)} ds^{(2)} \end{aligned}$$

и т. д., и, наконец, смешанная разность  $\Delta^{\mathbf{h}} \xi_n(\mathbf{x})$  равна:

$$\Delta_l^{h^{(l)}} \left( \int_{x^{(1)}}^{x^{(1)}+h^{(1)}} \dots \int_{x^{(l-1)}}^{x^{(l-1)}+h^{(l-1)}} \frac{\partial^{l-1} \xi_n(s^{(1)}, \dots, s^{(l-1)}, x^{(l)})}{\partial s^{(1)} \dots \partial s^{(l-1)}} ds^{(1)} \dots ds^{(l-1)} \right) =$$

$$= \int_{x^{(1)}}^{x^{(1)}+h^{(1)}} \dots \int_{x^{(l-1)}}^{x^{(l-1)}+h^{(l-1)}} \int_{x^{(l)}}^{x^{(l)}+h^{(l)}} \frac{\partial^l \xi_n(s^{(1)}, \dots, s^{(l-1)}, s^{(l)})}{\partial s^{(1)} \dots \partial s^{(l-1)} \partial s^{(l)}} ds^{(1)} \dots ds^{(l-1)} ds^{(l)}.$$

Учитывая, кроме того, что для любой функции  $f$  выполнено соотношение  $|\int_V f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}| \leq \int_V |f(\mathbf{v})| d\mathbf{v}$ , получаем неравенство

$$\mathbf{E} |\Delta^h \xi_n(\mathbf{x})|^p \leq \mathbf{E} \left( \int_{x^{(1)}}^{x^{(1)}+h^{(1)}} \dots \int_{x^{(l)}}^{x^{(l)}+h^{(l)}} \left| \frac{\partial^l \xi_n(s^{(1)}, \dots, s^{(l)})}{\partial s^{(1)} \dots \partial s^{(l)}} \right| ds^{(1)} \dots ds^{(l)} \right)^p.$$

Далее, пусть  $\hat{\xi}(w)$  – непрерывно дифференцируемый (в среднем степени  $p$ ) на отрезке  $[\hat{u}, \hat{u} + \hat{h}]$  случайный процесс. Согласно неравенству Гельдера [38]

$$\int a(y)b(y) dy \leq \left( \int a^p(y) dy \right)^{1/p} \left( \int b^q(y) dy \right)^{1/q}, \quad p, q > 0; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(т. е. для  $q = p/(p-1)$ ) и теореме Фубини, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \int_{\hat{u}}^{\hat{u}+\hat{h}} \left| \frac{\partial \hat{\xi}(w)}{\partial s} \right| dw \right)^p &\leq \mathbf{E} \left[ \left( \int_{\hat{u}}^{\hat{u}+\hat{h}} \left| \frac{\partial \hat{\xi}(w)}{\partial s} \right|^p dw \right)^{1/p} \times |\hat{h}|^{1/q} \right]^p = \\ &= |\hat{h}|^{p/q} \mathbf{E} \int_{\hat{u}}^{\hat{u}+\hat{h}} \left| \frac{\partial \hat{\xi}(w)}{\partial s} \right|^p dw \leq |\hat{h}|^p \sup_{w \in [\hat{u}, \hat{u}+\hat{h}]} \mathbf{E} \left| \frac{\partial \hat{\xi}(w)}{\partial s} \right|^p = |\hat{h}|^p \mathbf{E} \left| \frac{\partial \hat{\xi}(x_{max})}{\partial s} \right|^p, \end{aligned}$$

где  $x_{max} \in [\hat{u}, \hat{u} + \hat{h}]$ ; здесь использована непрерывность производной процесса  $\hat{\xi}(w)$  в среднем степени  $p$ . Применяя последнее соотношение для случайных функций

$$\hat{\xi}^{(l)}(w) = \int_{x^{(1)}}^{x^{(1)}+h^{(1)}} \dots \int_{x^{(l-1)}}^{x^{(l-1)}+h^{(l-1)}} \frac{\partial^{l-1} \xi_n(s^{(1)}, \dots, s^{(l-1)}, w)}{\partial s^{(1)} \dots \partial s^{(l-1)}} ds^{(1)} \dots ds^{(l-1)}$$

(здесь  $\hat{u} = x^{(l)}$ ,  $\hat{h} = h^{(l)}$ );

$$\hat{\xi}^{(l-1)}(w) = \frac{\partial}{\partial x^{(l)}} \int_{x^{(1)}}^{x^{(1)}+h^{(1)}} \dots \int_{x^{(l-2)}}^{x^{(l-2)}+h^{(l-2)}} \frac{\partial^{l-2} \xi_n(s^{(1)}, \dots, s^{(l-2)}, w, x_{max}^{(l)})}{\partial s^{(1)} \dots \partial s^{(l-2)}} ds$$

(здесь  $\hat{u} = x^{(l-1)}$ ,  $\hat{h} = h^{(l-1)}$ ,  $ds = ds^{(1)} \dots ds^{(l-2)}$ ) и т. д. и, наконец, для

$$\hat{\xi}^{(1)}(w) = \frac{\partial^{l-1} \xi_n(w, x_{max}^{(2)}, \dots, x_{max}^{(l)})}{\partial x^{(2)} \dots \partial x^{(l)}}; \quad \hat{u} = x^{(1)}, \quad \hat{h} = h^{(1)},$$

получаем

$$\mathbf{E} |\Delta^h \xi_n(\mathbf{x})|^p \leq \sup_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{E} \left| \frac{\partial^l \xi_n(x^{(1)}, \dots, x^{(l)})}{\partial x^{(1)} \dots \partial x^{(l)}} \right|^p \times \left| \prod_{j=1}^l h^{(j)} \right|^p \leq H \left| \prod_{j=1}^l h^{(j)} \right|^p,$$

т. е. выполнено условие (2.3.4) для  $p = 1+r$ . Утверждение 2.4.2 доказано.

Отметим также следующий результат, полученный в работе [13].

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4.3.** *Если для случайных функций  $\xi_n(\mathbf{x})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , выполнено условие (2.3.1) и существуют всевозможные ограниченные в совокупности производные  $D_{m_1 \dots m_l} \xi_n(\mathbf{x})$ ,  $m_i \geq 0$ , до порядка  $k = m_1 + \dots + m_l = [l/2] + 1$  (здесь  $[A]$  – целая часть числа  $A$ ) включительно в среднем степени  $p$ ,  $p \geq 2$ , для  $\mathbf{x} \in X$ , то последовательность  $\{\xi_n(\mathbf{x})\}$  слабо сходится к  $\xi(\mathbf{x})$ .*

Утверждения 2.4.2 и 2.4.3, вообще говоря, независимы, так как из существования смешанных производных не более чем первого порядка по каждой координате до порядка  $l$  включительно не следует существования всевозможных смешанных производных порядка  $([l/2] + 1)$ .

## 2.5. Непрерывность важнейших функционалов в $C(X)$

**2.5.1. Непрерывность функционала «супремум».** В ряде приложений (в том числе при обосновании метода зависимых испытаний – см. далее разд. 2.6 – и при использовании спектральных моделей однородных случайных полей – см. далее разд. 2.7–2.12) важна сходимость (а значит и непрерывность) функционала

$$\Phi_1(z) = \sup_{\mathbf{x} \in X} z(\mathbf{x}), \quad z \in C(X).$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5.1.** *Функционал  $\Phi_1$  непрерывен в метрике  $\rho_C$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Сформулированное утверждение непосредственно следует из неравенств

$$|\Phi_1(z_1) - \Phi_1(z_2)| \leq \rho_C(z_1, z_2); \quad z_1, z_2 \in C(X). \quad (2.5.1)$$

Покажем сначала, что для всех  $y_1$  и  $y_2$  из  $C(X)$  справедливо

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} (y_1(\mathbf{x}) + y_2(\mathbf{x})) \leq \sup_{\mathbf{x} \in X} y_1(\mathbf{x}) + \sup_{\mathbf{x} \in X} y_2(\mathbf{x}). \quad (2.5.2)$$

Для всех  $\mathbf{x}$  из  $X$  имеем  $y_1(\mathbf{x}) \leq \sup_{\mathbf{x} \in X} y_1(\mathbf{x})$ ,  $y_2(\mathbf{x}) \leq \sup_{\mathbf{x} \in X} y_2(\mathbf{x})$  и  $y_1(\mathbf{x}) + y_2(\mathbf{x}) \leq \sup_{\mathbf{x} \in X} y_1(\mathbf{x}) + \sup_{\mathbf{x} \in X} y_2(\mathbf{x}) = A_1$ . Значит, число  $A_1$  является одной из верхних границ множества значений функции  $(y_1(\mathbf{x}) + y_2(\mathbf{x}))$ , а  $\sup_{\mathbf{x} \in X} (y_1(\mathbf{x}) + y_2(\mathbf{x}))$  – минимальная из всех верхних границ. Неравенство (2.5.2), таким образом, доказано.

Далее, для  $z_1, z_2 \in C(X)$  с помощью (2.5.2) получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= \sup_{\mathbf{x} \in X} z_1(\mathbf{x}) \leq \sup_{\mathbf{x} \in X} (z_1(\mathbf{x}) - z_2(\mathbf{x})) + \sup_{\mathbf{x} \in X} z_2(\mathbf{x}) \leq \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in X} |z_1(\mathbf{x}) - z_2(\mathbf{x})| + \Phi_1(z_2) \end{aligned}$$

или

$$\Phi_1(z_1) - \Phi_1(z_2) \leq \sup_{\mathbf{x} \in X} |z_1(\mathbf{x}) - z_2(\mathbf{x})| = \rho_C(z_1, z_2).$$

Аналогично получаем  $\Phi_1(z_2) - \Phi_1(z_1) \leq \rho_C(z_1, z_2)$ , откуда следует (2.5.1). Утверждение 2.5.1 доказано.

**2.5.2. Непрерывность функционала «интеграл».** В ряде случаев требуется сходимость (а значит и непрерывность) в  $C(X)$  функционала  $\Phi_2(z) = \int_X z(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ ,  $z \in C(X)$  (см. далее разд. 2.7). Здесь справедлив аналог соотношения (2.5.1):

$$|\Phi_2(z_1) - \Phi_2(z_2)| \leq \int_X |z_1(\mathbf{x}) - z_2(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \text{mes } X \rho_C(z_1, z_2).$$

## 2.6. Обоснование метода зависимых испытаний

**2.6.1. Сходимость конечномерных распределений последовательности  $\Xi_n$ .** Докажем утверждение 1.10.1, в котором говорится о том, что при выполнении условий (1.10.1). (1.10.2) метод зависимых испытаний имеет (по вероятности) порядок сходимости  $1/\sqrt{n}$ , т. е. для достаточно больших  $n$  выполнено

$$\mathbf{P} \left( \sup_{\mathbf{x} \in X} |Z_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| \leq \frac{H_3}{\sqrt{n}} \right) > 1 - \varepsilon \quad (2.6.1)$$



(см. соотношение (1.10.3)). Покажем, что последовательность

$$\Xi_n(\mathbf{x}) = \sqrt{n}(Z_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \tilde{\zeta}_j(\mathbf{x})$$

(см. соотношение (1.10.4)) слабо сходится в  $C(X)$  к непрерывной (по вероятности) гауссовской случайной функции  $\Xi(\mathbf{x})$  с нулевым средним и ковариациями  $\mathbf{E}\Xi(\mathbf{x}_1)\Xi(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}\tilde{\zeta}(\mathbf{x}_1)\tilde{\zeta}(\mathbf{x}_2)$ , где  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ . При этом будем проверять условия утверждения 2.4.2. Из условия (1.10.1) получаем, что функция  $\mathbf{D}\tilde{\zeta}(\mathbf{x})$  ограничена на  $X$ . Тогда сходимость конечномерных распределений последовательности  $\{\Xi_n(\mathbf{x})\}$  к гауссовским распределениям (т.е. выполнение условия (2.3.1)) следует из центральной предельной теоремы для одинаково распределенных случайных векторов [36].

**2.6.2. Использование дифференциальных условий слабой компактности и непрерывности функционала «супремум».** Заметим, что из условия (1.10.2) следует, что для случайных функций  $\{\Xi_n(\mathbf{x})\}$  выполнены дифференциальные условия слабой компактности в  $C(X)$ . Таким образом, условия утверждения 2.4.2 выполнены и последовательность случайных функций  $\{\Xi_n(\mathbf{x})\}$  слабо сходится к непрерывной гауссовской случайной функции  $\Xi(\mathbf{x})$ .

Согласно утверждению 2.5.1 и соотношению

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} |z(\mathbf{x})| = \max \left( \sup_{\mathbf{x} \in X} z(\mathbf{x}), \sup_{\mathbf{x} \in X} (-z(\mathbf{x})) \right)$$

получаем, что функционал  $\Phi_3(z) = \sup_{\mathbf{x} \in X} |z(\mathbf{x})|$  непрерывен в метрике  $\rho_C$ . Тогда из слабой сходимости последовательности  $\{\Xi_n(\mathbf{x})\}$  к  $\Xi(\mathbf{x})$  следует, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left( \sup_{\mathbf{x} \in X} |Z_n(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| \leq \frac{H_3}{\sqrt{n}} \right) = \\ & = \mathbf{P} \left( \sup_{\mathbf{x} \in X} |\Xi_n(\mathbf{x})| \leq H_3 \right) \rightarrow \mathbf{P} \left( \sup_{\mathbf{x} \in X} |\Xi(\mathbf{x})| \leq H_3 \right) \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Из последнего соотношения следует (2.6.1) (или (1.10.3)), так как непрерывная (с вероятностью единица) функция  $\Xi(\mathbf{x})$  ограничена (с вероятностью единица) на  $X$  некоторой константой, которую следует взять в качестве  $H_3$ . Утверждение 1.10.1 доказано.

## 2.7. Стохастическая тестовая система функций

**2.7.1. Слабая сходимость численных моделей случайных процессов и полей.** Описанная в разд. 2.2–2.5 теория слабой сходимости последовательностей случайных функций будет использована далее при изучении сходимости функционалов от траекторий численных спектральных моделей однородных гауссовских случайных полей  $\xi(\mathbf{x})$  (см. разд. 2.8–2.12). Такие модели применяются при описании облачной структуры (в частности, кучевой облачности), поверхности морского ветрового волнения, поля функции тока при гипотезе о хаотичности распределения потенциального вихря и др. [13]. Известны эффективные векторные спектральные модели, описывающие процессы турбулентности [12].

Исследуемые модели имеют вид последовательности  $\xi_n(\mathbf{x})$ . Как указывалось выше (см. подразд. 2.2.2), в приложениях метода Монте-Карло случайные функции  $\xi(\mathbf{x})$ , как правило, входят в описание моделируемого реального процесса таким образом, что в конечном итоге требуется исследовать вероятностные характеристики случайных величин  $\{\Phi(\xi)\}$  для некоторого набора функционалов  $\{\Phi\}$ . Поэтому при использовании вместо функции  $\xi(\mathbf{x})$  ее численной модели  $\xi_n(\mathbf{x})$  важна слабая сходимость последовательности  $\{\xi_n(\mathbf{x})\}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Кроме изучения аппроксимационных свойств мы представим далее относительно новое приложение численных спектральных моделей случайных функций из работы [39].

**2.7.2. Требования к тестовой системе функций.** Важнейшим элементом исследования алгоритмов приближения величин и функций (1.1.2)–(1.1.4), (1.1.8) является тестирование. При этом относительно входных данных соответствующих задач (подынтегральной функции  $g(\mathbf{x})$  в задаче (1.1.2); ядра  $\hat{k}(x', x)$  и свободного члена  $\hat{f}(x)$  в задаче (1.1.3), (1.1.4); функции двух переменных  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  в задаче (1.1.8) и т. п.) должны быть выполнены определенные ТРЕБОВАНИЯ:

1) чтобы соблюсти «независимость» тестирования, нужно добиваться того, чтобы вид (график) перечисленных выше функций был случайным, заранее непредсказуемым;

2) для рассмотрения случаев «сложных» входных данных нужно, чтобы имелась возможность варьировать вычислительные затраты на получение одного значения используемой функции;

3) нужно, чтобы хотя бы в простейших ситуациях можно было проверить расчеты аналитически;

4) как правило, нужно обеспечить принадлежность используемой функции определенному классу гладкости;

5) для изучения теоретической эффективности исследуемых алгоритмов нужно, чтобы имела возможность получать уточненные средние верхние границы погрешностей для используемых функций.

### 2.7.3. Использование траекторий моделей случайных полей.

Анализ сформулированных требований приводит к достаточно «естественной» идее использования траекторий численных моделей случайных полей в качестве тестовых функций. К сожалению, эти модели часто строятся для специальных приложений и обладают малой степенью общности [13, 16].

Тем не менее, в работе [39] на примере задачи (1.1.2) показано, что достаточно удачным (с точки зрения выполнения сформулированных требований 1–5) оказывается выбор в качестве тестовых функций траекторий спектральных моделей вещественных однородных гауссовских случайных полей (см. далее разд. 2.10) с конечным спектром вида

$$\xi_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \sqrt{p_k} [\gamma_k^{(1)} \cos(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}_k) + \gamma_k^{(2)} \sin(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}_k)]. \quad (2.7.1)$$

Здесь  $\gamma_k^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  – независимые в совокупности стандартные нормальные величины;  $\mathbf{x} \in Q_s = (0, 1)^s$ .

Имеется два способа выбора векторов  $\{\boldsymbol{\lambda}_k\}$ . Первый способ – с разбиением спектра (см. далее подразд. 2.10.1) – связан с соотношениями  $\boldsymbol{\lambda}_k \in \Lambda_k$  и  $\boldsymbol{\lambda}_k \sim f(\boldsymbol{\lambda})/p_k$  (знак « $\sim$ » означает «распределен согласно плотности»), где  $n = m^l$ ;  $\Lambda_k = [k_1 h, (k_1 + 1)h) \times \dots \times [k_l h, (k_l + 1)h)$ ;  $h = A/m$ ;  $k_i = 0, \dots, m - 1$  и  $p_k = \int_{\Lambda_k} f(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \equiv 1/n$ ;

$$f(\boldsymbol{\lambda}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{A^l} \text{ при } \boldsymbol{\lambda} \in [0, A)^l; \\ 0 \text{ иначе} \end{array} \right\}. \quad (2.7.2)$$

Второй способ выбора  $\boldsymbol{\lambda}_k$  – без разбиения спектра (см. далее подразд. 2.10.4) – предусматривает численное моделирование  $\boldsymbol{\lambda}_k$  в  $\Lambda$  согласно плотности равномерного распределения (2.7.2). Для обоих способов  $p_k = 1/n$ . Случайный выбор точек  $\{\boldsymbol{\lambda}_k\}$  позволяет получать совпадение корреляционных функций модели (2.7.1) и предельного (при  $n \rightarrow \infty$ ) однородного гауссовского случайного поля с нулевым средним и единичной дисперсией (см., например, [8, 16] и подразд. 2.10.2).

Заметим также, что пару независимых значений стандартной нормальной случайной величины можно получить по формулам (см., например, [8, 16]):

$$\gamma_k^{(1)} = (-2 \ln \alpha_{k,1})^{1/2} \cos 2\pi \alpha_{k,2}, \quad \gamma_k^{(2)} = (-2 \ln \alpha_{k,1})^{1/2} \sin 2\pi \alpha_{k,2},$$

и тогда соотношение (2.7.1) принимает вид, удобный для непосредственных вычислений на ЭВМ:

$$\xi_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n (-2 p_k \ln \alpha_{k,1})^{1/2} \cos((\boldsymbol{\lambda}_k, \mathbf{x}) + 2\pi \alpha'_{k,2}), \quad \alpha'_{k,2} = 1 - \alpha_{k,2}. \quad (2.7.3)$$

**2.7.4. Выполнение требований к тестовой системе (на примере задачи интегрирования).** Для простоты рассмотрим стандартный алгоритм метода Монте-Карло (1.1.2) и покажем, что функции вида

$$g(\mathbf{x}) = A^s \xi_n(\mathbf{x}) \quad (2.7.4)$$

удовлетворяют сформулированным требованиям 1–5. Сразу отметим, что идея умножения функций (2.7.1), (2.7.3) на константу  $A^s$  в формуле (2.7.4) пришла после реальных тестовых расчетов [39]. Смысл этой идеи состоит в более тщательном учете больших амплитуд синуса и косинуса при увеличении параметра размера  $A$  спектрального множества  $\Lambda$ . Заметим также, что вместо функций (2.7.4) при тестировании алгоритмов численного интегрирования целесообразно использовать специальные преобразования моделей (2.7.1), (2.7.3) (см. далее разд. 2.12).

«Случайность» получаемых подынтегральных функций  $g(\mathbf{x})$  (требование 1) очевидна, так как, например, в (2.7.1) используются реализации стандартных нормальных случайных величин  $\{\gamma_k^{(j)}, j = 1, 2\}$  и случайных точек  $\{\boldsymbol{\lambda}_k\}$ .

Варьировать затраты на вычисление одного значения функции (2.7.4) (требование 2) можно за счет изменения числа слагаемых (параметра  $n$ ) в сумме (2.7.1).

Аналитически вычисляется однократный интеграл (требование 3):

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 A \xi_n(x) dx = A \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{p_k} (\gamma_k^{(1)} \sin \lambda_k - \gamma_k^{(2)} (\cos \lambda_k - 1))}{\lambda_k};$$

аналогичные формулы можно вывести и для случая  $l > 1$ .

Несложно вычисляется и  $q$ -я производная случайной функции  $A\xi_n(x)$  по  $x$  имеет вид (здесь удобно воспользоваться формулой (2.7.3)):

$$g^{(q)}(x) = A\xi_n^{(q)}(x) = A \sum_{k=1}^n (-2p_k \ln \alpha_{k,1})^{1/2} \lambda_k^q \cos(\lambda_k x + 2\pi\alpha'_{k,2} + q\pi/2).$$

При достаточно большом  $A$  в этой сумме возникнут большие коэффициенты  $\lambda_k^q$  (во всяком случае, для реализаций  $\lambda_k$ , близких к  $A$ ), причем эти коэффициенты возрастают с увеличением  $q$  степенным образом. Хотя формально функция (2.7.3) является бесконечно дифференцируемой по  $x$ , можно считать, что  $g = A\xi_n \in C^r(Q_s)$ , если  $|A\xi_n^{(q)}| \leq B$  для  $q \leq r$  и  $|A\xi_n^{(q)}| > B$  для  $q > r$ , где  $B$  – заданное достаточно большое положительное число (т. е. на практике разумно полагать, что производная не существует, если ее модуль превышает заданный уровень  $B$ ). Варьируя  $A$  и задавая  $B$ , можно добиваться принадлежности функции  $g = A\xi_n$  пространству  $C^r(Q_s)$  для требуемого  $r$  (см. требование 4).

Что касается требования 5, то, например, для средней погрешности

$$\Delta_1 = \mathbf{E} \left| \sum_{i=1}^M g(x_i)h - \int_0^1 g(x) dx \right|$$

формулы прямоугольников

$$I = \int_0^1 g(x) dx \approx \sum_{i=1}^M g(x_i)h, \quad h = 1/M, \quad x_i = (i-1)h + h/2$$

справедливо неравенство [39]:

$$\Delta_1 \leq \frac{\sqrt{\pi}h^2 A^3 \sqrt{n}}{144\sqrt{2}} \times \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}; \quad (2.7.5)$$

здесь в соотношении (2.7.4) использована модель (2.7.1) без разбиения спектра. Аналогичные зависимости от параметров  $A$  и  $n$  можно вывести и для других формул численного интегрирования (так, в работе [39] кроме формулы (2.7.5) приведены соответствующие неравенства для формул трапеций и Симпсона).

**2.7.5. Использование тестовой системы при исследовании функциональных алгоритмов. Реализация случайных областей.** Траектории спектральных моделей случайных полей (2.7.1), (2.7.3) и их

модификаций (см. далее разд. 2.12) можно использовать при тестировании функционального алгоритма 1.1.1. Рассмотрим соответствующую возможность на примере приближения интеграла (1.1.8). Если параметр  $\mathbf{x}$  имеет размерность  $l$ , а интегрирование ведется по  $s$  переменным, то при тестировании можно рассмотреть задачу глобальной аппроксимации функции  $l$  переменных:

$$\varphi_1(x^{(1)}, \dots, x^{(l)}) = \int_Y A^{l+s} \xi_n(x^{(1)}, \dots, x^{(l)}, x^{(l+1)}, \dots, x^{(l+s)}) dx^{(l+1)} \dots dx^{(l+s)}.$$

Модельные (гауссовские и негауссовские) траектории случайных полей можно использовать при построении сложных областей интегрирования  $X$ . Например, можно взять  $X = \{\mathbf{x} : \xi_n(\mathbf{x}) > 0\}$ .

## 2.8. Корреляционная теория однородных случайных полей

### 2.8.1. Спектральное разложение корреляционной функции.

Основой для построения спектральных моделей вида (2.7.1), (2.7.3) служат конструкции корреляционной теории стационарных (в широком смысле) случайных функций (как указывалось выше, это «математический анализ в среднем степени  $p = 2$ » – см. подразд. 2.4.1) [40]. Основы этой теории мы изложим для случая комплекснозначных случайных функций (здесь необходимые обозначения более компактны и наглядны). Прежде всего упомянем теорему Бохнера–Хинчина.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.8.1.** *Для того чтобы функция  $R(\mathbf{u})$  была корреляционной функцией комплекснозначного однородного случайного поля (стационарного в широком смысле случайного процесса) с непрерывным временем, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление вида*

$$R(\mathbf{u}) = \int_{\Lambda} e^{i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})} F(d\boldsymbol{\lambda}), \quad (2.8.1)$$

где  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  обозначает скалярное произведение векторов  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\lambda}$  из  $R^l$ :  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = u^{(1)}\lambda^{(1)} + \dots + u^{(l)}\lambda^{(l)}$ , а  $F(\boldsymbol{\lambda})$  – некоторую конечную меру на борелевских множествах спектрального пространства  $\Lambda \subseteq R^l$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8.1.** *Соотношение (2.8.1) называется спектральным разложением корреляционной функции  $R(\mathbf{u})$ . Мера  $F(\boldsymbol{\lambda})$  из (2.8.1) называется спектральной мерой. Если спектральная мера абсолютно непрерывна  $F(A) = \int_A f(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda}$ , то функцию  $f(\boldsymbol{\lambda})$  называют спектральной плотностью.*

**2.8.2. Спектральное представление случайного поля.** Согласно теореме о спектральном представлении (см. далее утверждение 2.8.2), для комплекснозначных стационарных в широком смысле случайных функций с непрерывными траекториями справедливо соотношение

$$\xi(\mathbf{x}) = m + \int_{\Lambda} e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{t})} dG(\boldsymbol{\lambda}), \quad (2.8.2)$$

где  $m \equiv \mathbf{E} \xi(\mathbf{x})$ , а  $G(\boldsymbol{\lambda})$  – случайная функция с некоррелированными приращениями и нулевым средним такая, что для любых борелевских множеств  $A_1$  и  $A_2$  из  $\Lambda$  выполнено

$$\mathbf{E} \int_{A_1} dG(\boldsymbol{\lambda}) \left( \int_{A_2} dG(\boldsymbol{\lambda}) \right)^* = F(A_1 \cap A_2).$$

Интеграл в (2.8.2) понимается как предел в среднеквадратическом соответствующих интегральных сумм (см. далее утверждение 2.8.2). В дальнейшем полагаем  $m(\mathbf{x}) \equiv 0$  и  $\mathbf{D}(\mathbf{x}) \equiv 1$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8.2.** Соотношение (2.8.2) называется **спектральным представлением стационарной случайной функции**  $\xi(\mathbf{x})$ .

Для вещественнозначных случайных функций  $\xi(\mathbf{x})$  спектральная плотность  $f(\boldsymbol{\lambda})$  является четной по каждой координате функции:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\lambda}) &= f(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(i-1)}, \lambda^{(i)}, \lambda^{(i+1)}, \dots, \lambda^{(l)}) = \\ &= f(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(i-1)}, -\lambda^{(i)}, \lambda^{(i+1)}, \dots, \lambda^{(l)}). \end{aligned}$$

Кроме того, мнимая часть  $G(\boldsymbol{\lambda})$  – нечетная, а действительная часть – четная функция от  $\boldsymbol{\lambda}$ , т. е. для симметричных относительно начала координат областей  $A_1$  и  $A_2$  ( $\boldsymbol{\lambda} \in A_1 \iff -\boldsymbol{\lambda} \in A_2$ ) выполнено  $\int_{A_1} dG(\boldsymbol{\lambda}) = \left( \int_{A_2} dG(\boldsymbol{\lambda}) \right)^*$ , причем для сохранения некоррелированности необходимо, чтобы случайные величины

$$G_1 = \operatorname{Re} \int_{A_1} dG(\boldsymbol{\lambda}) \quad \text{и} \quad G_2 = \operatorname{Im} \int_{A_1} dG(\boldsymbol{\lambda})$$

были независимы для любого  $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$  и

$$\mathbf{E} G_1 = \mathbf{E} G_2 = 0, \quad \mathbf{D} G_1 = \mathbf{D} G_2 = \frac{1}{2} \int_{A_1} f(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda}.$$

Тогда выражения (2.8.1) и (2.8.2) имеют вид:

$$R(\mathbf{u}) = \int_{\Lambda} \cos(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) f(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} = 2 \int_{\Lambda_+} \cos(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) f(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda},$$

$$\xi(\mathbf{x}) = \int_{\Lambda_+} \cos(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) dG_1(\boldsymbol{\lambda}) + \int_{\Lambda_+} \sin(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) dG_2(\boldsymbol{\lambda}),$$

где  $\Lambda_+ = \{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(l)}) : \lambda^{(i)} \geq 0\}$ , а  $G_1(\boldsymbol{\lambda})$  и  $G_2(\boldsymbol{\lambda})$  – вещественные случайные функции с некоррелированными приращениями и совпадающими дисперсиями приращений, причем

$$G(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{G_1(\boldsymbol{\lambda}) - G_2(\boldsymbol{\lambda})}{2} \quad \text{при } \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_+.$$

Последние соотношения показывают, что в вещественнозначном случае формулы для спектрального разложения корреляционной функции и для спектрального представления случайной функции действительно являются более громоздкими, чем в комплекснозначном случае.

Утверждение о существовании спектрального представления (2.8.2) формулируется следующим образом.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.8.2.** *Если  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  – разбиение спектрального пространства  $\Lambda$  на простые пространственно-односвязные области такие, что  $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ ;  $\Lambda_n = \{|\boldsymbol{\lambda}| \geq t_n\}$ , а  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1}$  разбивают область  $\{|\boldsymbol{\lambda}| < t_n\}$  так, что при  $n \rightarrow \infty$  одновременно выполнено*

$$t_n \rightarrow +\infty \quad \text{и} \quad \max_{1 \leq k \leq n-1} \text{diam } \Lambda_k \rightarrow 0, \quad (2.8.3)$$

*то имеет место соотношение*

$$\int_{\Lambda} e^{i(\mathbf{t}, \boldsymbol{\lambda})} dG(\boldsymbol{\lambda}) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( e^{i(\mathbf{t}, \boldsymbol{\lambda}_k)} \int_{\Lambda_k} dG(\boldsymbol{\lambda}) \right), \quad (2.8.4)$$

где  $\boldsymbol{\lambda}_k \in \Lambda_k$ .

Утверждение 2.8.2 доказывается с помощью предельного перехода от случая конечного спектра (который соответствует стохастической интегральной сумме из правой части равенства (2.8.4)). Отметим также, что соотношение (2.8.4) служит основой построения спектральных моделей случайных полей (см. далее подразд. 2.10.1).



## 2.9. Моментные условия слабой компактности в $C(X)$

**2.9.1. Критерий существования смешанных среднеквадратических производных.** В корреляционной теории стационарных случайных функций имеется также следующее

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.9.1.** *Если  $\xi(\mathbf{x})$  – однородное случайное поле с корреляционной функцией  $R(\mathbf{u})$  и  $f(\boldsymbol{\lambda})$  – его спектральная плотность, то для того чтобы существовала производная*

$$\frac{\partial^k \xi(x^{(1)}, \dots, x^{(l)})}{\partial(x^{(1)})^{m_1} \dots \partial(x^{(l)})^{m_l}}, \quad k = m_1 + \dots + m_l$$

в смысле сходимости в среднеквадратическом (т. е. в среднем степени  $p = 2$ ), непрерывная в этом же смысле, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий:

- 1) существует  $\frac{\partial^{2k} R(u^{(1)}, \dots, u^{(l)})}{\partial(u^{(1)})^{2m_1} \dots \partial(u^{(l)})^{2m_l}}$ , и эта производная непрерывна;
- 2) ограничен смешанный спектральный момент

$$\int_{\Lambda} |\lambda^{(1)}|^{2m_1} \dots |\lambda^{(l)}|^{2m_l} f(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(l)}), \quad \Lambda \subseteq R^l.$$

**2.9.2. Моментные условия слабой сходимости в  $C(X)$ .** Из утверждения 2.9.1 для  $m_1 = \dots = m_l = 1$ , утверждения 2.4.2 для  $p = 2$  и очевидного неравенства

$$|\lambda^{(1)}|^{2m_1} \dots |\lambda^{(l)}|^{2m_l} \leq \|\boldsymbol{\lambda}\|_l^{2k}$$

следует

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.9.2.** *Если для однородных случайных полей  $\xi_n(\mathbf{x})$ ,  $n = 1, 2, \dots$  со спектральными плотностями  $f_{\xi_n}(\boldsymbol{\lambda})$  выполнено условие (2.3.1) и существует положительная константа  $H$  такая, что выполнено*

$$\sup_n \int_{\Lambda} \|\boldsymbol{\lambda}\|_l^\beta f_{\xi_n}(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} < H \quad (2.9.1)$$

для  $\beta = 2l$ , то последовательность  $\{\xi_n(\mathbf{x})\}$  слабо сходится к  $\xi(\mathbf{x})$  в  $C(X)$ .

Здесь уместно заметить, что из утверждений 2.4.3, 2.9.2 можно получить менее ограничительное моментное условие слабой сходимости (2.9.1) с  $\beta = 2([l/2] + 1)$ .

Забегая вперед, заметим, что для ряда приложений (в частности, для рандомизированных моделей гауссовских случайных полей) можно существенно ослабить условие (2.9.1) (см. далее подразд. 2.11.3).

## 2.10. Спектральные модели однородных гауссовских случайных полей

**2.10.1. Использование интегральной суммы спектрального представления.** Утверждение 2.8.2 наводит на мысль использовать в качестве численной модели однородного случайного поля  $\xi(\mathbf{x})$  с нулевым средним и единичной дисперсией допредельную интегральную сумму

$$\xi_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \theta_k e^{i(t, \lambda_k)}, \quad \theta_k = \int_{\Lambda_k} dG(\lambda). \quad (2.10.1)$$

Несложно понять, что приближение (2.10.1) совпадает с (2.7.1) для случая моделирования вещественного гауссовского однородного поля (см. подразд. 2.7.3).

Наличие разбиения спектрального пространства  $\Lambda$  на подмножества  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  позволяет трактовать модель (2.10.1) как пример дискретно-стохастического алгоритма (см. предисловие).

**2.10.2. Свойства конечномерных распределений спектральной модели.** Обычно модель (2.10.1) используется для моделирования только гауссовских случайных полей. Это связано с тем, что случайные величины  $\theta_k$  из (2.10.1) реализуются на ЭВМ как независимые случайные величины, а в этом случае при выполнении условий (2.8.3) конечномерные распределения модели (2.10.1) сходятся к гауссовским распределениям при  $n \rightarrow \infty$  (это следует из центральной предельной теоремы – см. далее утверждение 2.11.3). Поэтому уже в допредельных выражениях вида (2.1.10) берут

$$\theta_k = \sqrt{p_k} \gamma_k, \quad p_k = \int_{\Lambda_k} f(\lambda) d\lambda \quad \text{или} \quad p_k = 1/n \quad (2.10.2)$$

(для моделей с разбиением и без разбиения спектра соответственно – см. далее подразд. 2.10.4). Здесь  $\gamma_k$  – стандартная нормальная случайная величина (комплексная или вещественная) – см. формулу (2.7.1). Соображения о построении негауссовских спектральных моделей сформулированы далее в разд. 2.12.

Модель (2.10.1), (2.10.2) воспроизводит одномерное распределение: при фиксированном  $\mathbf{x}_0$  случайная величина  $\xi_n(\mathbf{x}_0)$  имеет гауссовское распределение (ведь выражение (2.10.1) представляет собой линейную комбинацию стандартных гауссовских случайных величин). Несложно убедиться в том, что  $\mathbf{E}\xi_n(\mathbf{x}_0) = 0$  и  $\mathbf{D}\xi_n(\mathbf{x}_0) = 1$ .

Многомерные распределения поля (2.10.1), (2.10.2) являются гауссовскими, однако эти распределения не совпадают с соответствующими конечномерными распределениями поля  $\xi(\mathbf{x})$ . Можно лишь утверждать, что при  $n \rightarrow \infty$  и  $p_k \rightarrow 0$  все конечномерные распределения модели (2.10.1) сходятся к соответствующим распределениям поля  $\xi(\mathbf{x})$  (см. далее подразд. 2.11.2).

**2.10.3. Воспроизведение корреляционной функции. Рандомизированная спектральная модель.** В качестве иллюстрации несовпадения конечномерных распределений полей  $\xi_n(\mathbf{x})$  и  $\xi(\mathbf{x})$  можно использовать соотношения (2.8.1) и

$$R_{\xi_n}(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^n p_k e^{i(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_k)},$$

показывающие, что характеристики двумерных распределений этих полей – корреляционные функции  $R_{\xi_n}(\mathbf{u})$  и  $R(\mathbf{u})$ , вообще говоря, не равны. Тем не менее, имеется прием, позволяющий добиться совпадения корреляционных функций  $R_{\xi_n}(\mathbf{u})$  и  $R(\mathbf{u})$ .

В каждом элементе  $\Lambda_k$  разбиения спектрального пространства реализуем выборочное значение  $\boldsymbol{\lambda}_k$ , распределенное согласно усеченному распределению:

$$\boldsymbol{\lambda}_k \sim f_k(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{f(\boldsymbol{\lambda})}{p_k}. \quad (2.10.3)$$

Для полученного набора  $\{\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_n\}$  реализуем траекторию случайного поля  $\xi_n(\mathbf{x})$  по формуле (2.10.1).

Соотношения (2.10.1), (2.10.3) определяют *рандомизированную спектральную модель с разбиением спектра*.

Учитывая соотношение (2.10.3) и свойства случайной меры  $G(\boldsymbol{\lambda})$ , описанные в подразд. 2.8.2, получаем:

$$R_{\xi_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\lambda}, G} \left( \sum_{k,j=1}^n e^{i(\boldsymbol{\lambda}_k, \mathbf{x}_1) - i(\boldsymbol{\lambda}_j, \mathbf{x}_2)} \int_{\Lambda_k} dG(\boldsymbol{\lambda}) \left( \int_{\Lambda_j} dG(\boldsymbol{\lambda}) \right)^* \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E}_{\boldsymbol{\lambda}, G} \left( \sum_{i=1}^n e^{i(\boldsymbol{\lambda}_k, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \left| \int_{\Lambda_k} dG(\boldsymbol{\lambda}) \right|^2 \right) = \sum_{k=1}^n \left( \mathbf{E}_G \left| \int_{\Lambda_k} dG(\boldsymbol{\lambda}) \right|^2 \right) \times \\
&\quad \times \int_{\Lambda_k} e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \frac{f(\boldsymbol{\lambda})}{p_k} d\boldsymbol{\lambda} \Bigg) = \sum_{k=1}^n \int_{\Lambda_k} e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} f(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} = \\
&\quad = \int_{\Lambda} e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} f(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} = R(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2).
\end{aligned} \tag{2.10.4}$$

Условное одномерное распределение рандомизированной модели (2.10.1), (2.10.3) при фиксированных значениях  $\{\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_n\}$  является стандартным гауссовским; следовательно, одномерное распределение рандомизированного поля  $\xi_n(\mathbf{x})$  тоже стандартно. Аналогичные соображения показывают, что многомерные распределения рандомизированной модели (2.10.1), (2.10.3) не являются гауссовскими. Поле  $\xi_n(\mathbf{x})$  однородно, но не эргодично. Эти недостатки ослабевают при  $n \rightarrow \infty$  и при равномерном измельчении спектрального пространства  $\Lambda$  (точнее, при выполнении условий типа (2.8.3)) – см. далее разд. 2.11.

#### 2.10.4. Рандомизированная модель без разбиения спектра.

При реализации рандомизированной гауссовской спектральной модели (2.10.1)–(2.10.3) определенные трудности связаны с построением разбиения  $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$  спектрального пространства  $\Lambda$  и моделированием выборочных значений векторов  $\{\boldsymbol{\lambda}_k\}$  согласно усеченным плотностям (2.10.3).

Во многих случаях более простой (и экономичной) оказывается рандомизированная модель вида (2.10.1), в которой векторы  $\{\boldsymbol{\lambda}_k\}$  одинаково распределены в  $\Lambda$  согласно плотности  $f(\boldsymbol{\lambda})$  и  $\theta_k = \gamma_k/\sqrt{n}$ :

$$\xi_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \gamma_k e^{i(\mathbf{t}, \boldsymbol{\lambda}_k)}. \tag{2.10.5}$$

Такая конструкция называется *рандомизированной спектральной моделью без разбиения спектра*. Модель (2.10.5) воспроизводит гауссовские одномерные распределения и корреляционную функцию:  $R_{\xi_n}(\mathbf{u}) = R(\mathbf{u})$ . Из утверждения 2.11.2 (см. далее подразд. 2.11.2) следует сходимость конечномерных распределений последовательности (2.10.5) к соответствующим распределениям гауссовского случайного поля  $\xi(\mathbf{x})$ .

## 2.11. Сходимость спектральных моделей

**2.11.1. Скорость сходимости в среднеквадратическом.** В этом разделе мы изучим аппроксимационные свойства рандомизированных спектральных моделей (2.10.1), (2.10.5), а точнее, исследуем различные виды сходимости

$$\xi_n(\mathbf{x}) \rightarrow \xi(\mathbf{x}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.11.1)$$

Факт сходимости (2.11.1) в среднеквадратическом дает теорема о спектральном представлении (см. утверждение 2.8.2). Следующее утверждение дает скорость сходимости в среднеквадратическом последовательности (2.10.1), (2.10.3).

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.11.1.** *Если для некоторого  $\beta > 0$  выполнено соотношение*

$$\int_{\Lambda} |\lambda|^\beta f(\lambda) d\lambda < H_1 \quad (2.11.2)$$

*и, кроме того,*

$$d_k = \text{diam } \Lambda_k < H_2 a_n n^{-1/l}, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (2.11.3)$$

*(такое разбиение области  $\{|\lambda| < a_n\}$  можно получить, используя, например, равномерную прямоугольную решетку с шагом по каждой оси порядка  $n^{-1/l}$ ), то при  $a_n = H_3 n^{2/(l(2+\beta))}$  для достаточно большого  $n$  имеет место оценка*

$$\mathbf{E}|\xi_n(\mathbf{x}) - \xi(\mathbf{x})|^2 < H_4 n^{-2\beta/(l(2+\beta))},$$

где константа  $H_4$  не зависит от аргумента  $\mathbf{x}$ , принадлежащего ограниченному множеству  $X$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Учитывая совпадение спектральных плотностей  $f_{\xi_n}(\lambda) = f(\lambda)$ , по аналогии с выкладками (2.10.4) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|\xi_n(\mathbf{x}) - \xi(\mathbf{x})|^2 &= \mathbf{E}_{\lambda, G} \sum_{k, j=1}^n \left( \int_{\Lambda_k} \left( e^{i(\lambda_k, \mathbf{x})} - e^{i(\lambda, \mathbf{x})} \right) dG(\lambda) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \int_{\Lambda_j} \left( e^{i(\lambda_j, \mathbf{x})} - e^{i(\lambda, \mathbf{x})} \right) dG(\lambda) \right)^* \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{\Lambda_k} \left| e^{i(\lambda_k, \mathbf{x})} - e^{i(\lambda, \mathbf{x})} \right|^2 f(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Несложно вычислить (учитывая, что  $e^{iu} = \cos u + i \sin u$ ), что

$$\left| e^{i(\boldsymbol{\lambda}_k, \mathbf{x})} - e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} \right|^2 = 2 - 2 \cos((\boldsymbol{\lambda}_k, \mathbf{x}) - (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})).$$

Заметим, что  $|\boldsymbol{\lambda}_k - \boldsymbol{\lambda}| < d_k$  при  $\boldsymbol{\lambda}_k, \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_k$  и  $k = 1, \dots, n-1$  и в силу неравенства Коши–Буняковского  $((\boldsymbol{\lambda}_k, \mathbf{x}) - (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}))^2 \leq |\mathbf{x}|^2 |\boldsymbol{\lambda}_k - \boldsymbol{\lambda}|^2$ . Из ограниченности  $X$  следует, что существует константа  $H_5 > 0$  такая, что  $|\mathbf{x}|^2 < H_5$ . При достаточно больших  $n$  величины  $d_k$  равномерно малы и разложение  $\cos((\boldsymbol{\lambda}_k, \mathbf{x}) - (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}))$  по малому аргументу  $((\boldsymbol{\lambda}_k, \mathbf{x}) - (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}))$  дает оценку

$$\left| e^{i(\boldsymbol{\lambda}_k, \mathbf{x})} - e^{i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})} \right|^2 < H_6 d_k^2 < H_7 a_n^2 n^{-2/l}, \quad k = 1, \dots, n-1;$$

здесь использовано неравенство (2.11.3). Следовательно,

$$\mathbf{E} |\xi_n(\mathbf{x}) - \xi(\mathbf{x})|^2 \leq H_7 a_n^2 n^{-2/l} \int_{|\boldsymbol{\lambda}| < a_n} f(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} + H_8 \int_{|\boldsymbol{\lambda}| \geq a_n} f(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda}. \quad (2.11.5)$$

Наконец, учитывая соотношение (2.11.2) и неравенство

$$\int_{|\boldsymbol{\lambda}| \geq a_n} f(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \leq a_n^{-\beta} \int_{|\boldsymbol{\lambda}| \geq a_n} |\boldsymbol{\lambda}|^\beta f(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda},$$

где  $a_n = H_3 n^{2/(l(2+\beta))}$ , получаем

$$\mathbf{E} |\xi_n(\mathbf{x}) - \xi(\mathbf{x})|^2 \leq H_9 n^{4/(l(2+\beta))} n^{-2/l} + H_{10} n^{-2\beta/(l(2+\beta))} = H_4 n^{-2\beta/(l(2+\beta))}.$$

Утверждение 2.11.1 доказано.

Нетрудно заметить, что оценка (2.11.5) оптимальна по порядку, если  $a_n$  определяется уравнением  $a_n^2 n^{-2/l} = \int_{|\boldsymbol{\lambda}| \geq a_n} f(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda}$ . При этом если  $f(\boldsymbol{\lambda})$  достаточно быстро (например, экспоненциально) убывает при  $|\boldsymbol{\lambda}| \rightarrow +\infty$ , то математическое ожидание  $\mathbf{E} |\xi_n(\mathbf{x}) - \xi(\mathbf{x})|^2$  не превосходит величины  $H n^{-2/l} L(n)$ , где  $L(n)$  – медленно растущая функция.

Отметим, что в ряде случаев из сходимости в среднеквадратическом случайных функций  $\xi_n(\mathbf{x})$  и ее производных можно получить скорость равномерной (в среднем) сходимости последовательности  $\{\xi_n(\mathbf{x})\}$

к  $\xi(\mathbf{x})$ , используя теоремы вложения (см., например, [38]). В частности, для случайного процесса  $\xi(x)$  (т. е. для  $l = 1$ ), используя вложение соболевского пространства  $W_2^1[a, b]$  в  $C[a, b]$ , имеем оценку

$$\mathbf{E} \sup_{x \in [a, b]} |\xi_n(x) - \xi(x)| \leq H_{11} n^{-\beta_0/(2+\beta_0)}$$

при выполнении условия (2.11.2) при  $\beta = 2 + \beta_0$  для некоторого положительного  $\beta_0$ .

**2.11.2. Сходимость конечномерных распределений.** Справедливо следующее

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.11.2** (центральная предельная теорема для случайных функций) [35]. Пусть дана последовательность сумм случайных функций

$$\psi_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M_n} \zeta_{nk}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in X, \quad n, M_n \in \mathbf{N},$$

и выполнены следующие условия:

1) при фиксированном  $n$  случайные величины  $\zeta_{n1}(\mathbf{x}_1), \dots, \zeta_{nM_n}(\mathbf{x}_{M_n})$  взаимно независимы при любых  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{M_n}$ , обладают моментами второго порядка, причем  $\mathbf{E}\zeta_{nk}(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{E}\zeta_{nk}^2(\mathbf{x}) = b_{nk}^2(\mathbf{x})$  и  $\max_k b_{nk}^2(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ;

2) при  $n \rightarrow \infty$  корреляционная функция  $\hat{R}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  сходится к некоторому пределу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{R}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \hat{R}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2);$$

3) суммы  $\psi_n(\mathbf{x})$  при каждом  $\mathbf{x}$  удовлетворяют условию Лундберга: при любом  $\tau > 0$  выполнено

$$\frac{1}{B_n^2(\mathbf{x})} \sum_{k=1}^{M_n} \int_{|w|^2 > \tau^2 B_n^2(\mathbf{x})} w^2 dF_{nk}(\mathbf{x}, w) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где  $B_n^2(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M_n} b_{nk}^2(\mathbf{x})$ , а  $F_{nk}(\mathbf{x}, w)$  — функция распределения случайной величины  $\zeta_{nk}(\mathbf{x})$ . Тогда конечномерные распределения случайных функций  $\psi_n(\mathbf{x})$  сходятся к конечномерным распределениям гауссовской случайной функции  $\psi(\mathbf{x})$  с математическим ожиданием  $\mathbf{E}\psi(\mathbf{x}) \equiv 0$  и корреляционной функцией  $\hat{R}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ .

Применим это утверждение для рандомизированной модели (2.10.1), (2.10.3) с независимыми случайными величинами  $\{\theta_k\}$ . Заметим, что из

соотношения (2.10.1) и свойств случайной меры  $G(\lambda)$  следует, что каждая из величин  $\theta_k$  представима в виде  $\theta_k = \sqrt{p_k} \hat{\gamma}_k$ , причем величины  $\{\hat{\gamma}_k\}$  независимы и для всех  $k = 1, \dots, n$  выполнено  $\mathbf{E}\hat{\gamma}_k = 0$  и  $\mathbf{D}\hat{\gamma}_k = 1$ . В частности, в соотношении (2.10.3) в качестве  $\{\hat{\gamma}_k\}$  взяты стандартные нормальные случайные величины.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.11.3. *Если*

$$\max_{k=1, \dots, n} \mathbf{E} |\hat{\gamma}_k|^{2+\sigma} < H_1 \quad (2.11.6)$$

для некоторых  $\sigma > 0$  и  $H_1 > 0$  ( $\sigma$  и  $H_1$  не зависят от  $n$ ) и

$$\max_{k=1, \dots, n} p_k \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (2.11.7)$$

то конечномерные распределения случайного поля  $\xi_n(\mathbf{x})$  сходятся к конечномерным распределениям гауссовской случайной функции  $\xi(\mathbf{x})$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим условия утверждения 2.11.2. В нашем случае  $M_n = n$ ,  $\zeta_{nk}(\mathbf{x}) = e^{i(\lambda_{k, \mathbf{x}})} \sqrt{p_k} \hat{\gamma}_k$ . Первое условие утверждения 2.11.2 выполнено в силу соотношений (2.11.6), (2.11.7). Второе условие справедливо вследствие равенства (2.10.4). Остается проверить условие Линдберга, которое можно переписать в виде: для любого  $\tau > 0$

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{E}(\zeta_{nk}^2(\mathbf{x}); |\zeta_{nk}(\mathbf{x})| > \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

С учетом соотношения (2.11.6) имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(\zeta_{nk}^2(\mathbf{x}); |\zeta_{nk}(\mathbf{x})| > \tau) &\leq \sum_{k=1}^n \mathbf{E} \left( \frac{|\zeta_{nk}(\mathbf{x})|^{2+\sigma}}{\tau^\sigma}; |\zeta_{nk}(\mathbf{x})| > \tau \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\tau^\sigma} \sum_{k=1}^n \mathbf{E} |\zeta_{nk}(\mathbf{x})|^{2+\sigma} = \frac{1}{\tau^\sigma} \sum_{k=1}^n \mathbf{E} \left( \left| e^{i(\lambda_{k, \mathbf{x}})} \sqrt{p_k} \hat{\gamma}_k \right| \right)^{2+\sigma} \leq \\ &\leq \frac{H_1}{\tau^\sigma} \sum_{k=1}^n p_k^{1+\sigma/2} \leq \frac{H_1}{\tau^\sigma} \left( \max_{k=1, \dots, n} p_k \right)^{\sigma/2} \sum_{k=1}^n p_k, \end{aligned}$$

и тогда из соотношений (2.11.7) и  $\sum_{k=1}^n p_k = 1$  следует условие 3 утверждения 2.11.2. Утверждение 2.11.3 доказано.

Для модели (2.10.1)–(2.10.3) величины  $\{\hat{\gamma}_k\}$  являются гауссовскими, и условие (2.11.6), безусловно, выполнено. Что касается условия



(2.11.7), то оно является менее ограничительным по сравнению с условием (2.8.3). Соотношение (2.11.7), в частности, выполнено для практически удобного разбиения спектрального пространства на «кольца»

$$\Lambda_k = \{\boldsymbol{\lambda} : a_{k-1} \leq |\boldsymbol{\lambda}| < a_k\}, \quad k = 1, \dots, n-1; \quad \Lambda_n = \{\boldsymbol{\lambda} : |\boldsymbol{\lambda}| \geq a_n\};$$

здесь  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n$  и  $\max_{k=1, \dots, n} (a_k - a_{k-1}) \rightarrow 0$  (для такого разбиения условие (2.8.3) не выполнено).

**2.11.3. Функциональная сходимост: моментные условия.** Напомним (см. соотношение (2.11.1)), что спектральную модель  $\xi_n(\mathbf{x})$  можно трактовать как последовательность случайных функций, сходящуюся (в различных вероятностных смыслах) к моделируемой функции  $\xi(\mathbf{x})$ . Заметим также, что  $\xi_n(\mathbf{x}) \in C(X)$ , т.е. траектории случайной функции  $\xi_n(\mathbf{x})$  непрерывны. Рассмотрим вопрос о функциональной сходимости гауссовской рандомизированной модели (2.10.1)–(2.10.3) к моделируемой случайной функции  $\xi(\mathbf{x})$  в  $C(X)$ .

Согласно общей теории слабой сходимости в  $C(X)$ , рассмотренной нами в разд. 2.2–2.4, 2.9, помимо условий сходимости конечномерных распределений (2.11.7) или (2.8.3) требуется наложить дополнительное условие слабой компактности в терминах смешанных разностей (утверждение 2.3.4), или смешанных производных в среднем степени  $p$  (утверждения 2.4.2 и 2.4.3), или спектральных моментов (утверждение 2.9.2). Мы рассмотрим самые наглядные моментные условия (2.9.1) для гауссовской рандомизированной модели (2.10.1)–(2.10.3). Для этой модели корреляционные функции  $R_{\xi_n}(\mathbf{u})$  и  $R(\mathbf{u})$  совпадают (см. соотношение (2.10.4)), а значит совпадают и спектральные плотности:  $f_{\xi_n}(\boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{\lambda})$ . Следовательно, вместо условия (2.9.1) можно рассматривать соотношение (2.11.2) для некоторого  $\beta$ .

Из утверждений 2.4.2, 2.9.1, 2.9.2 имеем  $\beta = 2l$ . Из утверждений 2.4.3, 2.9.1, 2.9.2 следует, что величину  $\beta$  можно уменьшить до  $2([l/2] + 1)$ . Учитывая специфику построения модели (2.10.1)–(2.10.3) и гауссовость предельного поля  $\xi(\mathbf{x})$ , удается ослабить моментное условие слабой сходимости последовательности  $\xi_n(\mathbf{x})$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.11.4 [13].** *Слабая сходимост спектральной модели с разбиением спектра (2.10.1)–(2.10.3) к однородному гауссовскому полю  $\xi(\mathbf{x})$  следует из условий (2.8.3) и (2.11.2) для произвольного  $\beta > 0$ .*

Для модели без разбиения спектра (2.10.5) слабую сходимост (2.11.1) удалось получить при выполнении условия (2.11.2) для  $\beta = 2$  [13].

## 2.12. Негауссовские спектральные модели

**2.12.1. Способы реализации негауссовских спектральных моделей.** Заметим, что тестовые функции (2.7.1), (2.7.3) представляют собой тригонометрические полиномы. Для получения более широкого спектра тестовых функций можно попытаться использовать реализации негауссовских спектральных моделей. В качестве модели негауссовского поля можно взять сумму вида (2.7.1) с  $\lambda_k \in \Lambda_k$  и  $\text{diam}\Lambda_k \rightarrow 0$ . Однако здесь величины  $\lambda_{k_1}$  и  $\lambda_{k_2}$  при  $k_1 \neq k_2$  должны быть зависимыми.

В связи с этим возможны два пути получения алгоритмов построения спектральных моделей негауссовских случайных функций:

– брать наиболее распространенные негауссовские стационарные случайные функции, пытаться находить зависимость между элементами разбиения спектра и строить модели с учетом этой зависимости;

– брать такие виды зависимости элементов спектра, которые легко моделировать, а затем исследовать, какие случайные функции получаются при моделировании.

Второй путь представляется более перспективным. В данном разделе рассмотрены негауссовские случайные функции, полученные с помощью преобразований гауссовских моделей.

**2.12.2. Функции на гауссовских траекториях. Метод обратной функции распределения.** Одним из простых способов получения негауссовских распределений является рассмотрение случайных функций вида

$$\Xi_n^{(\psi)}(\mathbf{x}) = \psi(\xi_n(\mathbf{x})) \quad (2.12.1)$$

(см., например, [13]). Здесь  $\psi(v)$  – функция (неслучайная), определенная на интервале  $(-\infty, +\infty)$ , а случайная функция  $\xi_n$  является спектральной моделью вида (2.7.1) – с разбиением или без разбиения спектра. Рассмотрим вопрос о том, как выглядят одномерные распределения случайного поля  $\Xi_n^{(\psi)}$ . В силу того что одномерные распределения моделей (2.7.1) являются стандартными гауссовскими, плотность  $p_{\Xi}$  одномерного распределения случайной функции (2.12.1) совпадает с плотностью  $p_{\psi(\gamma)}$  распределения случайной величины  $\psi(\gamma)$ , где  $\gamma$  – стандартная нормальная величина.

Сразу заметим, что можно добиться того, чтобы случайные функции  $\Xi_n^{(\psi)}$  из (2.12.1) имели заданную одномерную функцию распределения  $F_{\mathbf{x}_0}$  для  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ , если взять  $\psi_{\mathbf{x}_0}(v) = F_{\mathbf{x}_0}^{-1}F_{\gamma}(v)$  (в этом случае моделирование случайной функции согласно формуле (2.12.1) называется

методом обратной функции распределения [13, 16]), где  $F_\gamma$  – функция распределения случайной величины  $\gamma$ . В [13] приведен общий вид ковариационной функции случайного процесса (здесь  $l = 1$ )  $\psi_x(\xi_0)$  для этого случая:

$$r(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_{u_1}^{-1}(F_\gamma(w_1)) F_{u_2}^{-1}(F_\gamma(w_2)) dw_1 dw_2}{2\pi \sqrt{1 - \rho^2(u_1, u_2)} \exp\left(\frac{w_1^2 + w_2^2 - 2\rho(u_1, u_2)w_1 w_2}{2(1 - \rho^2(u_1, u_2))}\right)},$$

где  $\rho$  – корреляционная функция стандартного гауссовского процесса  $z(x)$  ( $\mathbf{E}z(x) = 0$ ,  $\mathbf{D}z(x) = 1$ ). В нашем случае в качестве  $z$  используется  $\xi_n$ . В дальнейшем, рассуждая о методе обратной функции распределения, будем полагать, что функция распределения  $F_{\mathbf{x}}$  одинакова для всех  $\mathbf{x} \in X$ :  $F_{\mathbf{x}} \equiv F_\theta$ .

Рассмотрим также некоторые другие преобразования гауссовских случайных функций вида (2.12.1). Хорошо известно (см., например, [23]), что в случае, когда  $\psi$  – непрерывно дифференцируемая строго возрастающая функция, то

$$p_\Xi(u) = p_\gamma(q(u))q'(u), \quad (2.12.2)$$

где  $q(u) = \psi^{-1}(u)$ . Например, если  $\psi(v) = e^v$ , то, согласно (1.12.2), имеем:

$$p_\Xi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \exp\left(-\frac{\ln^2 u}{2}\right), \quad u > 0.$$

Последнее распределение называется *логарифмически нормальным* (см., например, [41]). Ковариационная функция процесса  $\psi(\xi_0)$  (здесь  $l = 1$ ) имеет вид

$$r(w) = [\exp(\rho_K(w)) - 1]/(e - 1),$$

где  $\rho_K$  – корреляционная функция  $\xi_K$  [13].

Далее, если  $\psi$  – непрерывно дифференцируемая строго убывающая функция, то

$$p_\Xi(u) = p_\gamma(q(u))(-q'(u)) = p_\gamma(q(u))|q'(u)|. \quad (2.12.3)$$

Пусть теперь интервал  $(-\infty, +\infty)$  разбит точками  $a_1 < a_2 < \dots < a_{T-1} < a_T$  на полуинтервалы

$$(a_0 = -\infty, a_1], (a_1, a_2], \dots, (a_{T-1}, a_T], (a_T, +\infty = a_{T+1})$$

и известно, что на каждом открытом интервале  $I_t = (a_t, a_{t+1})$ ;  $t = 0, 1, \dots, T$ , функция  $\psi$  является непрерывно дифференцируемой либо строго возрастающей, либо строго убывающей, причем  $\psi'(v) \neq 0$  при  $v \in I_t$ . Обозначим через  $q_t(u)$  обратную функцию к  $\psi(v)$ ,  $v \in I_t$ . Тогда можно получить следующее обобщение формул (2.12.2) и (2.12.3) [41]:

$$p_{\Xi}(u) = \sum_{t=0}^T p_{\gamma}(q_t(u)) |q_t'(u)| \chi_{D_t}(u), \quad (2.12.4)$$

где  $D_t$  – область определения функции  $q_t(u)$ , а  $\chi_{D_t}$  – индикатор множества  $D_t$ :

$$\chi_{D_t}(w) = \{1 \text{ при } w \in D_t; 0 \text{ иначе}\}.$$

Например, для  $\psi(v) = v^2$  можно разбить интервал  $(-\infty, +\infty)$  на части  $I_1 = (-\infty, 0)$  и  $I_2 = (0, +\infty)$  и взять  $q_1(u) = -\sqrt{u}$ ,  $q_2(u) = \sqrt{u}$ . Тогда из (2.12.4) для  $\Xi = \gamma^2$  имеем:

$$p_{\Xi}(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} (p_{\gamma}(\sqrt{u}) + p_{\gamma}(-\sqrt{u})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-u/2}, \quad u > 0.$$

Ковариационная функция для  $l = 1$  имеет вид  $r(w) = 1 + 2\rho_K^2(w)$  [13].

Аналогично для  $\Xi = |\gamma|$  имеем:

$$p_{\Xi}(u) = p_{\gamma}(u) + p_{\gamma}(-u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-u^2/2}, \quad u > 0,$$

а для  $\Xi = \sqrt{|\gamma|}$  получаем:

$$p_{\Xi}(u) = 2u(p_{\gamma}(u^2) + p_{\gamma}(-u^2)) = \frac{2\sqrt{2}u}{\sqrt{\pi}} e^{-u^4/2}, \quad u > 0.$$

Ковариационная функция для  $l = 1$  имеет вид

$$r(w) = \frac{2}{\pi} \left[ \rho_K(w) \arcsin \rho_K(w) + \sqrt{1 - \rho_K^2(w)} \right].$$

Некоторые другие примеры преобразований вида (2.12.1) и соответствующих плотностей одномерного распределения и ковариационных функций случайных процессов  $\Xi_n$  приведены в [13].

**2.12.3. Комбинации со случайными величинами.** Другим способом изменения одномерного распределения случайного поля (2.7.1)

является комбинирование  $\xi_n$  со случайной величиной  $\eta$  известного распределения. В общем случае мы будем представлять эту комбинацию в виде

$$\zeta_n(\mathbf{x}) = g(\xi_n(\mathbf{x}), \eta), \quad (2.12.5)$$

где  $g(u, v)$  – некоторая борелевская функция. Одномерное распределение поля (2.12.5) совпадает с распределением случайной величины  $\zeta = g(\gamma, \eta)$ . Полагая, что для любого  $\mathbf{x}_0 \in X$  случайные величины  $\xi_n(\mathbf{x}_0)$  и  $\eta$  независимы, получаем следующее выражение для функции распределения случайной величины  $\zeta$  [41]:

$$F_\zeta(z) = \int_{u,v:g(u,v)<z} p_\gamma(u)p_\eta(v) du dv.$$

Для некоторых функций  $g$  удается выписать выражения для плотности распределения  $p_\zeta$  случайной величины  $\zeta$ . В частности, при  $g(u, v) = u+v$  получаем свертку:

$$p_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\gamma(z-v)p_\eta(v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\eta(z-u)p_\gamma(u) du.$$

Для  $g(u, v) = uv$  имеем:

$$p_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\gamma\left(\frac{z}{v}\right)p_\eta(v) \frac{dv}{|v|} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\eta\left(\frac{z}{u}\right)p_\gamma(u) \frac{du}{|u|}.$$

Для  $g(u, v) = u/v$  имеем:

$$p_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\gamma(zv)p_\eta(v) |v| dv. \quad (2.12.6)$$

В последнем случае при

$$\eta = \sqrt{(\tilde{\gamma}_1^2 + \dots + \tilde{\gamma}_q^2)/q}$$

(здесь  $\tilde{\gamma}_i \in N(0, 1)$  – независимые стандартные нормальные случайные величины) случайная величина  $\zeta$  имеет распределение Стьюдента (или  $t$ -распределение) с  $q$  степенями свободы [41] и формула (2.12.6) имеет вид

$$p_\zeta(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi q}} \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{q}\right)^{\frac{q+1}{2}}}. \quad (2.12.7)$$

В частности, для  $q = 1$  получается распределение Коши.

Если же рассмотреть случай  $g(u, v) = v/u$ , то

$$p_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\eta(zu)p_\gamma(u) |u| du. \quad (2.12.8)$$

И вновь при  $\eta \in N(0, 1)$  получаем плотность (2.12.7) с  $q = 1$  (т. е. распределение Коши).

Для того чтобы плотность (2.12.8) совпала с (2.12.7), можно рассмотреть случайную функцию

$$\zeta_n(\mathbf{x}) = \frac{\eta}{\sqrt{(\xi_n^2(\mathbf{x}) + \tilde{\gamma}_1^2 + \dots + \tilde{\gamma}_{q-1}^2)/q}}$$

(здесь вновь  $\eta, \tilde{\gamma}_i \in N(0, 1)$  – независимые стандартные нормальные случайные величины).

**2.12.4. Слабая сходимость преобразованных моделей.** Справедливо следующее

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.12.1.** *Если последовательность случайных функций  $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$  слабо сходится к случайной функции  $\xi$  при  $n \rightarrow \infty$ , а функция  $\psi(v)$  (неслучайная) равномерно непрерывна на  $(-\infty, +\infty)$ , то последовательность  $\{\Xi_n = \psi(\xi_n)\}$  слабо сходится в  $C(X)$  к полю  $\psi(\xi)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Утверждение следует из того факта, что функционал

$$\hat{\Phi}(z) = \Phi(\psi(z)), \quad z \in C(X),$$

где  $\Phi$  – непрерывный функционал в  $C(X)$ , также непрерывен в метрике  $\rho_C$ . Действительно, из непрерывности функционала  $\Phi$  следует, что для заданного  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta_1 > 0$  такое, что для всех  $y_1, y_2 \in C(X)$  таких, что  $\rho_C(y_1, y_2) \leq \delta_1$  выполнено

$$|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)| < \varepsilon.$$

Рассмотрим функции

$$z_1, z_2 \in C(X) \quad \text{и} \quad y_1 = \psi(z_1), \quad y_2 = \psi(z_2).$$

В силу равномерной непрерывности  $\psi$  функции  $y_1$  и  $y_2$  принадлежат  $C(X)$  и, кроме того, существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $w_1, w_2 \in R$  таких, что  $|w_1 - w_2| < \delta$ , следует, что  $|\psi(w_1) - \psi(w_2)| < \delta_1$ . Пусть теперь

$$\rho_C(z_1, z_2) = \sup_{\mathbf{x} \in X} |z_1(\mathbf{x}) - z_2(\mathbf{x})| < \delta.$$

Тогда для всех  $\mathbf{x} \in X$  выполнено  $|z_1(\mathbf{x}) - z_2(\mathbf{x})| < \delta$ , и значит

$$|y_1(\mathbf{x}) - y_2(\mathbf{x})| = |\psi(z_1(\mathbf{x})) - \psi(z_2(\mathbf{x}))| < \delta_1.$$

В силу произвольности  $\mathbf{x} \in X$  для выбранных нами функций  $y_1$  и  $y_2$  выполнено соотношение  $\rho_C(y_1, y_2) \leq \delta_1$ , а значит и

$$|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)| < \varepsilon.$$

Таким образом, для заданного  $\varepsilon > 0$  нашлось  $\delta > 0$  такое, что для всех  $z_1, z_2 \in C(X)$  таких, что  $\rho_C(z_1, z_2) < \delta$ , выполнено

$$|\hat{\Phi}(z_1) - \hat{\Phi}(z_2)| = |\Phi(\psi(z_1)) - \Phi(\psi(z_2))| = |\Phi(y_1) - \Phi(y_2)| < \varepsilon,$$

т. е. функционал  $\hat{\Phi}$  является непрерывным в метрике  $\rho_C$ . Утверждение 2.12.1 доказано.

Функция распределения  $F_\gamma$  стандартной случайной величины  $\gamma$ , несомненно, является равномерно непрерывной на  $(-\infty; +\infty)$ , поэтому для сходимости последовательности (2.12.1) в методе обратной функции распределения достаточно потребовать, чтобы функция  $F_\theta^{-1}$  была непрерывной на отрезке  $[0, 1]$ . Последнему требованию удовлетворяют распределения, сосредоточенные на отрезке.

Для рассмотренных выше примеров преобразований функции  $\psi(v) = e^v$  и  $\psi(v) = v^2$  не являются равномерно непрерывными, а функции  $\psi(v) = |v|$  и  $\psi(v) = \sqrt{|v|}$  являются равномерно непрерывными на  $(-\infty; +\infty)$ .

Из доказанного утверждения 2.12.1 также следует, что если функция  $g(u, v)$  равномерно непрерывна по  $u$  на всей числовой прямой при любом фиксированном  $v = v_0$ , то последовательность (2.12.5) слабо сходится в  $C(X)$  к функции  $\zeta(\mathbf{x}) = g(\xi(\mathbf{x}), \eta)$ .

## Библиографический список

1. Hammersley J. M., Handscomb D. C. Monte Carlo Methods. N. Y.: John Wiley and Sons, Inc., 1964.
2. Спанье Дж., Гелбард З. Метод Монте-Карло и задачи переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1972.
3. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.
4. Михайлов Г. А. Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло. Новосибирск: Наука, 1974.
5. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1974.
6. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976.
7. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике / Г. И. Марчук, Г. А. Михайлов, М. А. Назаралиев, Р. А. Дарбинян, Б. А. Каргин, Б. С. Елепов. Новосибирск: Наука, 1976.
8. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.
9. Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С. Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. М.: Наука, 1984.
10. Kalos M. H., Whitlock P. A. Monte Carlo methods. N. Y.: John Wiley and Sons, 1986.
11. Михайлов Г. А. Оптимизация весовых методов Монте-Карло. М.: Наука, 1987.
12. Сабельфельд К. К. Методы Монте-Карло в краевых задачах. М.: Наука, 1989.
13. Пригарин С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2005.
14. Михайлов Г. А. Весовые методы Монте-Карло. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
15. Михайлов Г. А. Весовые алгоритмы статистического моделирования. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2003.
16. Михайлов Г. А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд. центр «Академия», 2006.
17. Войтишек А. В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Ч. I: Обзор методов Монте-Карло. Генераторы случайных и псевдослучайных чисел. Новосибирск: НГУ, 1997.



18. Войтишек А. В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Ч. II: Моделирование дискретных случайных величин. Моделирование непрерывных случайных величин методом обратной функции распределения. Новосибирск: НГУ, 1997.
19. Войтишек А. В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Ч. III: Моделирование случайных векторов. Моделирование непрерывных случайных величин методом суперпозиции и методом исключения. Новосибирск: НГУ, 1997.
20. Войтишек А. В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Ч. IV: Моделирование случайных величин с распределениями, связанными с гамма-распределением. Моделирование случайных процессов и полей. Новосибирск: НГУ, 1997.
21. Войтишек А. В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Ч. V: Вычисление многократных интегралов. Аппроксимация интегралов, зависящих от параметра. Новосибирск: НГУ, 1999.
22. Войтишек А. В. Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. Ч. VI: Вычисление значений линейных функционалов от решения интегрального уравнения второго рода. Дискретно-стохастические методы решения интегрального уравнения второго рода. Новосибирск: НГУ, 2004.
23. Войтишек А. В. Символьные и численные расчеты в физических приложениях. Ч. II: Основы метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2006.
24. Швец В. В. Выбор параметров метода зависимых испытаний с конечно-элементным приближением плотности // Труды конференции молодых ученых. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2003. С. 146–154.
25. Voytishchek A. V., Shvets V. V. Complete optimization of a discrete stochastic numerical procedure for globally estimating the solution of an integral equation of the second kind // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2006. Vol. 21, № 3. P. 251–267.
26. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
27. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
28. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
29. Милосердов В. В. Дискретно-стохастические численные алгоритмы со сплайн-восполнениями: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новоси-

бирск, 2006.

30. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. М.: Высш. шк., 2000.

31. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

32. Ченцов Н. Н. Избранные труды: Математика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

33. Шкарупа Е. В. Дискретно-стохастические процедуры глобальной оценки решения интегрального уравнения второго рода. Метод полигона частот. Новосибирск, 1996 (Препринт/РАН. Сиб. отд-ние. ВЦ; 1076).

34. Литбеттер М., Ротсен Х., Линдгрэн Г. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.

35. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. М.: Наука, 1971.

36. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.

37. Боровков А. А. Сходимость мер и случайных процессов // Успехи математических наук. 1976. Т. 31, № 2 (188). С. 3–68.

38. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

39. Войтишек А. В., Каблукова Е. Г., Булгакова Т. Е. Использование спектральных моделей случайных полей при исследовании алгоритмов численного интегрирования // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9, специальный выпуск. С. 50–61.

40. Яглом А. М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеиздат, 1981.

41. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
<b>ГЛАВА 1. ДИСКРЕТНО-СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ</b>	
1.1. Дискретно-стохастические методы оценки функций .....	5
1.2. $L_2$ - и $C$ -подходы к оценке погрешности Д-СЧМ .....	8
1.3. Оценка детерминированной компоненты погрешности .....	10
1.4. Устойчивость аппроксимации Стренга–Фикса .....	13
1.5. Независимые оценки в узлах сетки .....	16
1.6. Метод зависимых испытаний .....	18
1.7. Методы гистограмм и полигона частот .....	20
1.8. Оценка стохастической компоненты погрешности для $L_2$ -подхода .....	23
1.9. Оценка стохастической компоненты погрешности для $C$ -подхода (случай независимых оценок в узлах) .....	25
1.10. Оценка стохастической компоненты погрешности для $C$ -подхода (случай зависимых оценок в узлах) .....	27
1.11. Общий вид погрешностей Д-СЧМ .....	30
1.12. Условная оптимизация Д-СЧМ .....	32
<b>ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ</b>	
2.1. Основные понятия теории случайных процессов и полей .....	35
2.2. Основы общей теории слабой сходимости последовательностей случайных полей .....	39
2.3. Условия слабой сходимости в $C(X)$ .....	42
2.4. Дифференциальные условия слабой компактности в $C(X)$ ...	44
2.5. Непрерывность важнейших функционалов в $C(X)$ .....	47
2.6. Обоснование метода зависимых испытаний .....	48
2.7. Стохастическая тестовая система функций .....	50
2.8. Корреляционная теория однородных случайных полей .....	54
2.9. Моментные условия слабой компактности в $C(X)$ .....	57

2.10. Спектральные модели однородных гауссовских случайных полей .....	58
2.11. Сходимость спектральных моделей .....	61
2.12. Негауссовские спектральные модели .....	66
Библиографический список .....	72