

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Лектор: профессор А.В. Сычев

4 - 5 семестр

1. Комплексные числа

Определение комплексных чисел и основные операции над ними. Геометрическое изображение комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексного числа. Стереографическая проекция. Сфера Римана. Расширенная комплексная плоскость. Предел последовательности. Критерий Коши существования предела. Функции комплексного переменного. Кривая Жордана.

2. Ряды комплексных чисел

Числовые и функциональные ряды. Равномерная сходимость. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Радиус сходимости и его нахождение. Теорема Коши - Адамара.

3. Аналитические функции

Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши - Римана. Определение аналитической функции. Аналитичность суммы степенного ряда. Некоторые элементарные функции. Обращение функций комплексного переменного. Геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции. Конформные отображения. Конформность отображения, осуществляемого однолистной аналитической функцией. Области однолистности и обращения степенной и экспоненциальной функций. Точки ветвления. Римановы поверхности корня натуральной степени и логарифма.

4. Дробно-линейные отображения

Основные свойства дробно-линейных отображений. Инвариантность ангармонического отношения четырех точек. Симметрия относительно прямой и окружности. Дробно-линейные отображения верхней полуплоскости и круга на круг.

5. Теория интеграла Коши

Комплексное интегрирование. Основные свойства комплексного интеграла. Лемма Гурса. Теорема Коши. Обобщенная теорема Коши. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Интеграл типа Коши. Существование производных всех порядков аналитической функции. Понятие неопределенного интеграла. Теорема Морера. Принцип максимума модуля для аналитических функций. Теорема Вейерштрасса о рядах аналитических функций. Интеграл в смысле главного значения по Коши. Предельные значения интеграла типа Коши. Формулы Сохоцкого.

6. Ряды Тейлора и Лорана

Ряды Тейлора. Эквивалентность понятий аналитичности и голоморфности. Внутренняя теорема единственности. Нули аналитической функции. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля. Ряд Лорана. Единственность разложения аналитической функции в ряд Лорана в кольце. Три типа изолированных

особых точек. Теорема Сохоцкого о поведении аналитической функции вблизи существенно особой точки. Бесконечно удаленная изолированная особая точка. Понятия целой и мероморфной функций.

7. Элементы теории вычетов

Вычет аналитической функции относительно изолированной особой точки. Вычисление вычета относительно полюса. Вычет аналитической функции относительно бесконечно удаленной точки. Основная теорема о вычетах. Вычисление некоторых контурных интегралов. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Основная теорема алгебры. Теорема Руше. Основное свойство производной однолистной аналитической функции. Интегральная формула Коши для бесконечной области. Условие того, чтобы заданная на замкнутой кривой функция была граничным значением аналитической функции. Разложение на простейшие дроби некоторых мероморфных функций. Применение вычетов для вычисления некоторых определенных интегралов.

8. Основные принципы теории конформных отображений

Аналитическое продолжение. Общая и полная аналитические функции. Теорема монодромии. Принцип непрерывности. Принцип симметрии Римана-Шварца. Аналитическое продолжение действительной аналитической функции действительного переменного. Теорема Римана о конформном отображении односвязных областей (упрощения в постановке задачи, существование и единственность). Некоторые вспомогательные утверждения: лемма Шварца, теорема об однолистности предельной функции, принцип компактности. Соответствие границ при конформных отображениях. Принцип взаимно-однозначного соответствия.

9. Приложения теории аналитических функций

Понятие гармонической функции. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части. Свойства гармонических функций: теорема о среднем, принцип экстремума и др. Интегральные формулы Шварца и Пуассона. Краевые задачи теории функций. Задача Дирихле. Решение задачи Дирихле для круга и произвольной жордановой области. Функция Грина. Связь между решением задачи Дирихле и конформным отображением области на круг. Задача Неймана. Решение задачи Неймана для единичного круга (формула Дини). Определение кусочно-аналитической функции по заданному скачку. Однородная и неоднородная задачи сопряжения. Задача Римана - Гильберта.

Библиографический список основной литературы

1. Билута П. А. Лекции по теории функций комплексного переменного / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2005.

Библиографический список дополнительной литературы

1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.:Наука, 1977.
2. Маркушевич А.И. Теория аналитической функции. М.:Наука, 1968. Т. 1,2.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.

М.:Наука, 1973.

4. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.:Наука, 1972.

5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.:Наука, 1968.

Рекомендуемые задачи

1. NN 1 - 39.

2. NN 84-90, 95-104, 425-438, 440-447, 450, 832-841, 852-857, 859.

3. NN 43, 58-61, 64-74, 77, 131, 134-147, 150, 187-192, 272, 278-292, 296-299, 301, 302, 304-309, 321-332, 338-340, 342-344, 348-353, 355-372.

4. NN 193-201, 203-215, 219-222, 228-230, 253, 254.

5. NN 386-396, 412-421, 1008, 1009.

6. NN 452-472, 506-512, 523, 525, 540, 543-562, 565-600, 788, 782, 796, 797.

7. NN 621-655, 657-671, 673-677, 682-687, 691-706, 718-728, 723-725, 802, 803.

8. NN 1082, 1085, 1084.

9. NN 151-180, 182-186, 1060.

Библиографический список литературы для работы на семинарах

1. Волковыский Л.И., Лунц Г.А., Араманович И.Г. *Сборник по теории функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1970.