МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

# СИММЕТРИЧЕСКИЕ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Методическая разработка для 1 курса ММФ

Автор проф. ЖЕЛЯБИН В.Н.

# Содержание

# 1 Введение

В теории векторных пространств со скалярным произведением большое значение играют эрмитовы и симметрические (в случае поля вещественных чисел) линейные преобразования (матрицы). Например, в интерпретации квантовой механики наблюдаемые являются эрмитовы матрицы или линейные операторы, действующие в гильбертовом пространстве. Линейное пространство эрмитовых матриц $A$, $B$ незамкнуто относительно обычного произведения матриц, однако замкнуто относительно симметризованного произведения $A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$. Основываясь на этом факте в 1934 году П.Йордан, Дж. фон Нейман и Е. Вигнер в совместной статье "Об алгебраическом формализме обобщения квантовой миханники"определили понятие йордановой алгебры.

Как известно, любая матрица с вещественными элементами представляется в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц. Благодаря этому многие свойства вещественных матриц можно изучать, используя только ее симметрическую часть.

Другой важный класс матриц — это унитарные (ортогональные) матрицы. Хорошо известно, что в эрмитовом (евклидовом) пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому является унитарной (ортогональной) матрицей. Кроме того, линейное преобразование, заданное унитарной (ортогональной) матрицей сохраняет длины векторов. Как известно, верно и обратное, линейное преобразование, сохраняющее длины векторов, является унитарным (ортогональным).

В данном учебном пособии мы изучаем как связаны ядра, соответствующие неприводимым компонентам характеристического многочлена ортогонального преобразования и пространства собственных векторов его симметрической части. В частности, предлагаем метод приведения ортогонального преобразования к каноническому виду, который использует иноформацию о собственных значениях и пространствах собственных векторов симметрической части исходного ортагонального преобразования. В частности, зная канонический вид симметрической части ортогонального преобразования, легко построить канонический вид исходного ортогонального преобразования. Кроме того, этот метод позволяет находить канонический вид нормального преобразования евклидова пространства.

Преимущество этого похода состоит в том, что, как правило, симметрическая часть ортогональной матрицы проще исходной.

# 2 Евклидовы и эрмитовы пространства

## 2.1 Определения евклидовых и эрмитовых пространств

Пусть $F$ — поле вещественных ($\mathbb{R}$) или комплексных ($\mathbb{C}$) чисел. Векторное пространство $V$ над полем $F$ называется *эрмитовым*, если каждой упорядоченной паре векторов $a, b$ из $V$ поставлено в соответствие число $(a, b) \in F$, называемое скалярным произведением вектора $a$ на вектор $b$ и обладающее следующими свойствами:

1) $(a, b) = \overline{(b, a)}$, где $\overline{(b, a)}$ — комплексно сопряженное число для $(b, a)$,

2) $\alpha(a, b) = (\alpha a, b)$ для любого $\alpha \in F$,

3) $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$,

4) если $a \neq 0$, то $(a, a) \in \mathbb{R}$ и $(a, a) > 0$.

Если $F = \mathbb{R}$, то $V$ называется *евклидовым*, в этом случае $(a, b) = (b, a)$.

Пример 1. Рассмотрим обычную евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$. Тогда произведение векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, определенное как

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = ||\overrightarrow{a}||\,||\overrightarrow{b}||\cos(\widehat{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}),$$

где $(\widehat{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}})$ — наименьший угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, а $||\overrightarrow{a}||$ — длина вектора $\overrightarrow{a}$, является известным скалярным произведением векторов.

Пример 2. Пусть $V = \mathbb{R}^n$ — $n$ — мерное пространство вектор-столбцов длины $n$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Зададим на $V$ скалярное произведение, полагая

$$(a, b) = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n,$$

где $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. Как легко видеть, (доказать самостоятельно) введенное таким образом произведение действительно является скалярным произведением. Такое скалярное произведение называется стандартным, а евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ называется стандартным (координатным).

Упражнение. *Пусть $V = \mathbb{C}^n$ — $n$ — мерное пространство вектор-столбцов длины $n$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Зададим на $V$ скалярное произведение, полагая*

$$(a, b) = \alpha_1\overline{\beta_1} + \ldots + \alpha_n\overline{\beta_n},$$

*где $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. Доказать, что введенное таким образом произведение действительно является скалярным произведением. Эрмитово пространство $\mathbb{C}^n$ называется стандартным (координатным)*

Пример 3. Рассмотрим векторное (функциональное) пространство

$$C_{[p,q]} = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ непрерывные функции на отрезке } [p, q] \text{ с вещественными значениями}\}.$$

На пространстве $C_{[p,q]}$ определим скалярное произведение, полагая

$$(f, g) = \int_p^q f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

Тогда $C_{[p;q]}$ с введенным скалярным произведением является евклидовым пространством.

**Лемма 1.** *В любом эрмитовом (евклидовом) пространстве скалярное произведение* $( , )$ *удовлетворяет следующим свойствам:*

*(a)* $(\mathbf{0}, a) = 0$, *где* $\mathbf{0}$ *— нулевой вектор пространства* $V$,

*(b)* $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$,

*(c)* $(a, \alpha b) = \overline{\alpha}(a, b)$ *(в евклидовом пространстве* $(a, \alpha b) = \alpha(a, b)$*).*

Доказательство. Поскольку $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{0}$, где $0$ — нулевой элемент поля $F$, то по свойствам 1) и 2) скалярного произведения

$$(\mathbf{0}, a) = \overline{(a, \mathbf{0})} = \overline{(a, 0 \cdot \mathbf{0})} = \overline{0(a, \mathbf{0})} = \overline{0} = 0.$$

Поэтому (a) доказано.

В силу свойств 1) и 3) имеем

$$(a, b + c) = \overline{(b + c, a)} = \overline{(b, a) + (c, a)} = \overline{(b, a)} + \overline{(c, a)} = (a, b) + (a, c).$$

Поэтому (b) доказано.

Докажем (c). По 1) и 3)

$$(a, \alpha b) = \overline{(\alpha b, a)} = \overline{\alpha(b, a)} = \overline{\alpha}\overline{(b, a)} = \overline{\alpha}(a, b).$$

Поэтому (c) доказано.

Пусть $V$ — евклидово пространство. Рассмотрим множество

$$V_{\mathbb{C}} = \{u + iv | u, v \in V \text{ и } i = \sqrt{-1}\text{— мнимая единица}\}$$

формальных сумм $u + iv$. Каждую формальную сумму $u + iv$ можно понимать как упорядоченную пару векторов $u$ и $v$. Таким образом, $u + iv = w + iz$ тогда и только тогда, когда $u = w$ и $v = z$. Превратим множество $V_{\mathbb{C}}$ в векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, полагая в качестве операции сложения векторов

$$(u + iv) + (w + iz) = (u + w) + i(v + z),$$

а в качестве операции умножения вектора на скаляр

$$(a + ib)(u + iv) = au - bv + i(av + bu),$$

где $au$ — результат умножения вектора $u$ на скаляр $a$ в евклидовом пространстве $V$.

Упражнение. *Доказать, что введенные таким образом операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр действительно превращают множество* $V_{\mathbb{C}}$ *в векторное пространство над полем* $\mathbb{C}$.

Зададим на векторном пространстве $V_{\mathbb{C}}$ скалярное произведение векторов

$$\langle u + iv, w + iz \rangle = (u, w) + (v, z) + i((v, w) - (u, z)).$$

**Лемма 2.** *Введенное произведение векторов в векторном пространстве* $V_{\mathbb{C}}$ *является скалярным произведением.*

Доказательство. Пусть $x = u + iv$ и $y = w + iz$. Тогда, с одной стороны,

$$\langle x, y \rangle = (u, w) + (v, z) + i((v, w) - (u, z)).$$

С другой стороны,

$$\langle y, x \rangle = (w, u) + (z, v) + i((z, u) - (w, v)).$$

Поэтому

$$\overline{\langle y, x\rangle} = (w,u)+(z,v)-i((z,u)-(w,v)) = (u,w)+(v,z)+i((v,w)-(u,z)) = \langle x,y\rangle.$$

Свойство 1) доказано.

Пусть $\alpha = a+ib$ — скаляр из $V_{\mathbb{C}}$. Тогда $\alpha x = au - bv + i(av+bu)$ и

$$\langle \alpha x, y\rangle = (au-bv,w)+(av+bu,z)+i((av+bu,w)-(au-bv,z)) =$$

$$(au,w)-(bv,w)+(av,z)+(bu,z)+i((av,w)+(bu,w)-(au,z)+(bv,z)) =$$

$$a(u,w)-b(v,w)+a(v,z)+b(u,z)+i(a(v,w)+b(u,w)-a(u,z)+b(v,z)) =$$

$$a((u,w)+(v,z))+b((u,z)-(v,w))+i(a((v,w)-(u,z))+b((u,w)+(v,z))) =$$

$$(a+ib)((u,w)+(v,z)+i((v,w)-(u,z))) = \alpha\langle x,y\rangle.$$

Свойство 2) доказано.

Свойство 3) очевидно. Докажем справедливость свойства 4). Действительно,

$$\langle x,x\rangle = (u,u)+(v,v)+i((v,u)-(u,v)) = (u,u)+(v,v) \geq 0$$

и если $x \neq 0$, то $\langle x,x\rangle > 0$.

Следовательно, $V_{\mathbb{C}}$ — эрмитово пространство со скалярным произведением $\langle\,,\rangle$. Введенное таким образом пространство $V_{\mathbb{C}}$ называется комплексификацией евклидова пространства $V$.

Пусть $a$ — вектор эрмитова пространства $V$. Тогда длину $||a||$ вектора $a$ определим следующим образом

$$||a|| = \sqrt{(a,a)}.$$

В силу свойства 4) скалярного произведения длина вектора $a$ определена корректно. Кроме того, для любого $\alpha \in F$ имеем

$$||\alpha a|| = |\alpha|\,||a||.$$

Если длина вектора $a$ равна 1, то $a$ — вектор единичной длины или *нормированный* вектор.

Пусть $a$ — ненулевой вектор. Тогда $||a|| \neq 0$. Положим $a' = \frac{a}{||a||}$. Как легко видеть,

$$||a'|| = \sqrt{(\frac{a}{||a||}, \frac{a}{||a||})} = \sqrt{\frac{(a,a)}{||a||^2}} = 1.$$

**Теорема 1** (неравенство Коши-Буняковского-Шварца). *Для любых векторов $x, y$ эрмитова (евклидова) пространства $V$ справедливо неравенство*

$$|(x,y)| \leq ||x||\,||y||,$$

*где $|(x,y)|$ — модуль числа $(x,y)$, т.е. $|(x,y)| = \sqrt{(x,y)\overline{(x,y)}}$.*

Доказательство. Пусть $x, y$ — вектора эрмитова пространства $V$. Если $y = 0$, то все доказано. Поэтому можно считать, что $y \neq 0$. Рассмотрим вектор $z = x - \frac{(x,y)}{(y,y)}y$. Тогда

$$(z,y) = (x - \frac{(x,y)}{(y,y)}y, y) = (x,y) - \frac{(x,y)}{(y,y)}(y,y) = (x,y)-(x,y) = 0.$$

Следовательно,

$$0 \le (z,z) = (x - \frac{(x,y)}{(y,y)}y, z) = (x,z) - (\frac{(x,y)}{(y,y)}y, z) = (x,z) = (x,x) - (x, \frac{(x,y)}{(y,y)}y) =$$

$$(x,x) - \frac{\overline{(x,y)}(x,y)}{(y,y)} = (x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}.$$

Поэтому

$$\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \le (x,x).$$

Отсюда получаем, что

$$|(x,y)|^2 \le ||x||^2||y||^2.$$

Тогда $|(x,y)| \le ||x||\,||y||$.

Заметим, что равенство $|(x,y)| = ||x||\,||y||$ достигается тогда и только тогда, когда скалярное произведение $(z,z) = 0$. Отсюда получаем, что $z = x - \frac{(y,x)}{(y,y)}y = 0$, т.е. вектора $x$ и $y$ — линейно зависимы.

Из теоремы 1 получаем

**Следствие 1.** *Длины векторов $x$, $y$ и $x+y$ удовлетворяют следующему неравенству (треугольников)*

$$||x+y|| \le ||x|| + ||y||.$$

Доказательство. По свойствам скалярного произведения имеем

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + \overline{(x,y)} + (y,y).$$

Пусть $(x,y) = a + ib$. Тогда

$$|(x,y)| = \sqrt{(x,y)\overline{(x,y)}} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского получаем

$$(x,y) + \overline{(x,y)} = 2a \le 2|(x,y)| \le 2||x||\,||y||.$$

Следовательно,

$$||x+y||^2 \le ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2.$$

Поэтому

$$||x+y|| \le ||x|| + ||y||.$$

**Следствие 2.** *Пусть $V$ — евклидово пространство. Тогда для любых ненулевых векторов $x, y \in V$ существует угол $\phi$, зависящий от $x, y$, такой, что $0 \le \phi \le \pi$ и*

$$\cos\phi = \frac{(x,y)}{||x||\,||y||}.$$

Упражнение. *Доказать, что в любом эрмитовом (евклидовом) пространстве имеет место тождество параллелограмма*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

**Лемма 3.** *В любом эрмитовом (евклидовом) пространстве скалярное произведение можно выразить через длины векторов и операции сложения векторов и умножения на скаляр. Более точно, для любых векторов $x, y \in V$:*

*для эрмитова пространства*

$$(x, y) = \frac{i||x+y||^2 + ||ix+y||^2 - (i+1)||x||^2 - (i+1)||y||^2}{2i};$$

*для евклидова пространства*

$$(x, y) = \frac{||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2}{2}.$$

Доказательство. Пусть $V$ — эрмитово пространство. Тогда

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y).$$

Поэтому в любом эрмитовом (евклидовом) пространстве справедливо равенство

$$(x, y) + (y, x) = ||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2.$$

Подставляя в это равенство вместо $x$ вектор $ix$, получим

$$i(x, y) - i(y, x) = ||ix+y||^2 - ||ix||^2 - ||y||^2 = ||ix+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2.$$

Умножим теперь первое равенство на $i$ и складывая его со вторым, получим

$$2i(x, y) = i||x+y||^2 - i||x||^2 - i||y||^2 + ||ix+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2 =$$

$$i||x+y||^2 + ||ix+y||^2 - (i+1)||x||^2 - (i+1)||y||^2.$$

Отсюда следует

$$(x, y) = \frac{i||x+y||^2 + ||ix+y||^2 - (i+1)||x||^2 - (i+1)||y||^2}{2i}.$$

Для евклидова пространства все очевидно.

## 2.2 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Вектора $x$ и $y$ эрмитова пространства $V$ называются *ортогональными* (обозначение $x \perp y$), если их скалярное произведение $(x, y) = 0$. В силу леммы 1.1 получаем, что нулевой вектор $\mathbf{0}$ ортогонален любому вектору пространства $V$.

Пусть вектора $x$ и $y$ — ортогональны. Тогда

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = ||x||^2 + ||y||^2.$$

В эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ это равенство известно как теорема Пифагора.

Система ненулевых векторов $a_1, \ldots, a_m$ эрмитова пространства называется *ортогональной*, если $(a_i, a_j) = 0$ для $i \neq j$. Ортогональная система векторов единичной длины называется *ортонормированной.*

**Лемма 1.** *Любая ортогональная система ненулевых векторов $a_1, \ldots, a_m$ — линейно независима. Пусть $dimV = n$. Тогда $m \leq n$.*

Доказательство. Предположим, что некоторая линейная комбинация векторов $a_1, \ldots, a_m$ равна нулю, т.е.

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_1 a_m = \mathbf{0},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F$. Тогда, умножая скалярно обе части этого равенства на вектор $a_i$, получим

$$\mathbf{0} = (\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_1 a_m, a_i) = \alpha_1(a_1, a_i) + \ldots + \alpha_m(a_m, a_i).$$

Ввиду ортогональности системы $a_1, \ldots, a_m$ имеем $\alpha_i(a_i, a_i) = 0$. Поэтому $\alpha_i = 0$. В силу произвольности выбора вектора $a_i$ получаем, что все коэффициенты $\alpha_i = 0$. Следовательно, система векторов $a_1, \ldots, a_m$ — линейно независима.

Поскольку число любой линейно независимой системы векторов не превосходит размерности пространства, то $m \leq n$

**Теорема 1** (процесс ортогонализации). *Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — линейно независимая система векторов эрмитова (евклидова) пространства $V$. Тогда можно построить такую ортонормированную систему векторов $e_1, \ldots, e_m$, что каждый вектор $e_i$ является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_i$.*

Доказательство. Положим $e_1 = \frac{a_1}{||a_1||}$. Тогда $e_1$ — нормированный вектор и является линейной комбинацией вектора $a_1$.

Предположим, что вектора $e_1, \ldots e_i$ уже построены. Пусть

$$\alpha_1 = (a_{i+1}, e_1), \ldots, \alpha_i = (a_{i+1}, e_i).$$

Рассмотрим вектор

$$e'_{i+1} = a_{i+1} - \alpha_1 e_1 - \ldots - \alpha_i e_i.$$

Ясно, что $e'_{i+1} \neq 0$, в противном случае, $a_{i+1}$ является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_i$. Кроме того, для любого $j = 1, ..., i$ получаем

$$(e'_{i+1}, e_j) = (a_{i+1}, e_j) - \alpha_1(e_1, e_j) - \ldots - \alpha_i(e_i, e_j) = (a_{i+1}, e_j) - \alpha_j = \alpha_j - \alpha_j = 0.$$

Поэтому $(e'_{i+1}, e_1) = ... = (e'_{i+1}, e_i) = 0$. Поскольку каждый вектор $e_j$, где $j = 1, ..., i$, является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_j$, то и $e'_{i+1}$ является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_{i+1}$.

Пусть теперь $e_{i+1} = \frac{e'_{i+1}}{||e'_{i+1}||}$. Тогда $e_1, ..., e_{i+1}$ — ортонормированная система из $i+1$ векторов, и каждый вектор $e_j$ из этой системы является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_j$.

Продолжая этот процесс, можно построить систему векторов $e_1, \ldots, e_m$.

**Следствие 1.** *Пусть $V$ — конечномерное эрмитово (евклидово) пространство размерности $n$. Тогда пространство $V$ имеет ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$. Более того, для любого вектора $x$*

$$x = (x, e_1)e_1 + \ldots + (x, e_n)e_n.$$

*Данное представление вектора $x$ называется разложением Фурье, а коэффициенты $(x, e_1), \ldots, (x, e_n)$ называются коэффициентами Фурье в базисе $e_1, \ldots, e_n$.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — произвольный базис пространства $V$. В силу теоремы 1 можно построить ортонормированную систему векторов $e_1, ..., e_n$. Тогда $e_1, ..., e_n$ — линейный базис пространства $V$.

Пусть $x$ — произвольный ненулевой вектор из $V$. Рассмотрим вектор

$$y = x - ((x, e_1)e_1 + \ldots + (x, e_n)e_n).$$

Тогда для любого вектора $e_i$ получаем

$$(y,e_i)=(x,e_i)-(x,e_1)(e_1,e_i)-\ldots-(x,e_n)(e_n,e_i)=(x,e_i)-(x,e_i)(e_i,e_i)=0.$$

Если $y\neq 0$, то пространство $V$ размерности $n$ содержит $n+1$ линейно независимых векторов $e_1,...,e_n,y$. Следовательно,

$$x=(x,e_1)e_1+\ldots+(x,e_n)e_n.$$

**Лемма 2.** *Пусть $e_1,\ldots,e_n$ — ортонормированный базис эрмитова (евклидова) пространства $V$. Пусть*

$$x=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j,\ y=\sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j,\ \text{где } \alpha_j,\beta_j\in F$$

*Тогда*

$$(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\overline{\beta_j},\ ||x||^2=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^2.$$

Доказательство. Поскольку

$$(e_i,e_j)=\begin{cases}0, & \text{если } i\neq j\\ 1, & \text{если } i=j\end{cases},$$

то

$$(x,y)=\left(\sum_i\alpha_i e_i,\sum_j\beta_j e_j\right)=\sum_{i,j}\alpha_j\overline{\beta_j}(e_i,e_j)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\overline{\beta_j}$$

В частности,

$$||x||^2=(x,x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\overline{\alpha_j}=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^2$$

## 2.3 Ортогональные дополнения и ортогональные суммы

Пусть $V$ — эрмитово (евклидово) пространство. Два множества, $M$ и $N$ из $V$, называются ортогональными (обозначается $M\perp N$), если $(m,n)=0$ для любого $m\in M$ и $n\in N$.

Упражнение. *Пусть $M\perp N$. Доказать, что либо $M\cap N=\emptyset$, либо $M\cap N=\{0\}$. Как следствие, если $N,M$ — подпространства в $V$, то $M\cap N=\{0\}$.*

Сумма $U_1+...+U_k$ векторных подпространств $U_1,\ldots,U_k$ пространства $V$ называется ортогональной, если $U_i\perp U_j$ для $i\neq j$. Ортогональная сумма всегда является прямой суммой.

Действительно, пусть $U=U_1+...+U_k$ — ортогональная сумма. Предположим, что

$$x=u_1+\ldots+u_k \text{ и } x=u_1'+\ldots+u_k', \text{где } u_1,u_1'\in U_1,...,u_k,u_k'\in U_k,$$

два представления вектора $x$. Тогда

$$0=(u_1-u_1')+\ldots+(u_k-u_k').$$

Так как $u_i - u_i' \in U_i$, то, умножая скалярно обе части последнего равенства на вектор $u_i - u_i'$, получим, что $(u_i - u_i', u_i - u_i') = 0$, т.е. $u_i = u_i'$ для $i = 1, \dots, k$.

Пусть $M$ — подмножество эрмитова пространства $V$. Определим ортогональное дополнение множества $M$, полагая

$$M^{\perp} = \{v \in V | (v, m) = 0 \text{ для всех } m \in M\}.$$

Упражнение. *Пусть $M$ — непустое подмножество из $V$. Доказать, что $M^{\perp}$ — подпространство в $V$.*

**Теорема 1.** *Пусть $V$ — конечномерное эрмитово пространство, и $L$ — его подпространство. Тогда $V$ есть прямая (ортогональная) сумма подпространства $L$ и его ортогонального дополнения. В частности, $dimV = dimL + dimL^{\perp}$.*

Доказательство. Пусть $e_1, ..., e_k$ — ортонормированный базис подпространства $L$ и $x \in V$. Рассмотрим вектор $y = (x, e_1)e_1 + ... + (x, e_k)e_k$ и положим $z = x - y$. Тогда

$$(z, e_i) = (x - y, e_i) = (x, e_i) - (y, e_i) = (x, e_i) - ((x, e_1)e_1 + ... + x, (e_k, x)e_k, e_i) =$$

$$(x, e_i) - (x, e_1)(e_1, e_i) - ... - (x, e_i)(e_i, e_i) - ... - (x, e_k)(e_k, e_i) = (x, e_i) - (x, e_i) = 0$$

для любого $i = 1, ..., k$. Следовательно, $z \in L^{\perp}$. Поэтому $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in L^{\perp}$. Тогда $V = L + L^{\perp}$ — ортогональная сумма. Ясно, что объединение базисов $L$ и $L^{\perp}$ будет базисом пространства $V$. Поэтому $\dim V = \dim L + \dim L^{\perp}$.

Элемент $y$ подпространства $L$, построенный при доказательстве теоремы 1, называется *ортогональной проекцией* $x$ на подпространство $L$, а $z \in L^{\perp}$ называется *ортогональной составляющей* относительно подпространства $L$.

Пусть $y$ — ненулевой вектор эрмитова пространства $V$. Тогда, как показано в теореме 1.1, для вектора $x$ имеем

$$(x - \frac{(x, y)}{(y, y)} y, y) = 0.$$

Пусть $L$ — подпространство, порожденное вектором $y$. Тогда $\frac{(x,y)}{(y,y)} y$ — ортогональная проекция $x$ на подпространство $L$. Число $\frac{(x,y)}{(y,y)}$ называется *коэффициентом* Фурье вектора $x$ относительно $y$. Вектор $x - \frac{(x,y)}{(y,y)} y$ — ортогональная составляющая относительно подпространства $L$.

Упражнение. *Пусть $V$ — конечномерное эрмитово (евклидово) пространство. Доказать, что для подпространств $L, L_1, L_2$ имеют место следующие соотношения:*

$$L^{\perp\perp} = L,\ (L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp},\ (L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}.$$

Пусть $L$ — подпространство эрмитова (евклидова) пространства $V$. Расстоянием $\rho(x, L)$ от точки евклидова пространства, заданной вектором $x$ до подпространства $L$, называется минимум расстояний от данной точки до точек пространства $L$, т.е.

$$\rho(x, L) = \min\{||x - u||, \text{ где } u \in L\}.$$

Покажем, что $\rho(x, L) = ||z||$, где $z$ — ортогональная составляющая вектора $x$ относительно подпространства $L$.

Действительно, $x = y + z$, где элемент $y$ — ортогональная проекция $x$ на подпространство $L$, а $z \in L^{\perp}$ — ортогональная составляющая относительно подпространства $L$. Тогда для $u \in L$

$$||x - u|| = ||y + z - u|| = ||(y - u) + z|| = ||y - u|| + ||z||$$

так как $(y-u)\perp z$. Поэтому

$$\rho(x,L)=\min\{||x-u||,\ \text{где } u\in L\}=\min\{||y-u||+||z||,\ \text{где } u\in L\}=||z||.$$

Пример. Пусть на отрезке $[0,1]$ задана функция $f(x)=\sqrt{x}$, и мы хотим приблизить ее прямой линией $y=a\cdot x+b$, т.е. найти $a,b$ при которых $\rho(f(x),a\cdot x+b)$ достигает минимума.

Рассмотрим евклидово пространство $C_{[0,1]}$. Тогда задача сводится к отысканию значений $a,b$, для которых длина $||\sqrt{x}-(a\cdot x+b)||$ является минимальной. В пространстве $C_{[0,1]}$ рассмотрим подпространство $L$, порожденное векторами 1 и $x$. Длина $||\sqrt{x}-(a\cdot x+b)||$ минимальна, когда вектор $\sqrt{x}-a\cdot x-b$ является ортогональной составляющей вектора $\sqrt{x}$ на подпространство $L$. Поэтому вектор $a\cdot x+b$ должен быть ортогональной проекцией вектора $\sqrt{x}$ на подпространство $L$.

Сначала процессом Грама-Шмидта найдем ортогональный базис $e_1,e_2$ подпространства $L$. Положим $e_1=1$. Тогда

$$(e_1,x)=\int_0^1 1\cdot x\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Пусть $e_2'=x-(e_1,x)e_1=x-\frac{1}{2}\cdot 1$. Тогда

$$||e_2'||=\sqrt{\int_0^1(x-\frac{1}{2})^2\,dx}=\sqrt{\frac{1}{3}(x-\frac{1}{2})^3\Big|_0^1}=\sqrt{\frac{1}{12}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

и $e_2=\frac{e_2'}{||e_2'||}=2\sqrt{3}(x-\frac{1}{2}\cdot 1)$. Теперь найдем ортогональную проекцию $y$ вектора $\sqrt{x}$ на подпространство $L$

$$y=(\sqrt{x},e_1)e_1+(\sqrt{x},e_2)e_2=\int_0^1\sqrt{x}\,dx+12\int_0^1\sqrt{x}(x-\frac{1}{2}\cdot 1)\,dx\cdot(x-\frac{1}{2}\cdot 1)=$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^1+12(\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\Big|_0^1-\frac{1}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^1)(x-\frac{1}{2}\cdot 1)=\frac{4}{5}x+\frac{4}{15}.$$

## 2.4 Задачи

1. Пусть $M = L + x_0$ — линейное многообразие евклидова пространства. Расстоянием $\rho(x, M)$ от точки, заданной вектором $x$ до многообразия $M$ называется минимум расстояний от данной точки до точек $M$, т.е.

$$\rho(x, L + x_0) = \min\{||x - u||, \text{ где } u \in L + x_0\}.$$

Доказать, что $\rho(x, L + x_0) = \rho(x - x_0, L)$.

2. Определителем Грама системы векторов $a_1, ..., a_k$ евклидова пространства называется следующий определитель

$$G(a_1, ..., a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & ... & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & ... & (a_2, a_k) \\ ... & ... & ... & ... \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & ... & (a_k, a_k) \end{vmatrix}.$$

Доказать, что вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда $G(a_1, ..., a_k) \neq 0$.

3. Пусть $M = L + x_0$ — линейное многообразие евклидова пространства, и $a_1, ..., a_k$ — некоторый базис подпространства $L$. Доказать, что

$$\rho(x, L)^2 = \frac{G(a_1, ..., a_k, x)}{G(a_1, ..., a_k)},\ \rho(x, L + x_0)^2 = \frac{G(a_1, ..., a_k, x - x_0)}{G(a_1, ..., a_k)}.$$

4. Параллелепипедом ($k$-мерным параллелепипедом), построенным на векторах $a_1, ..., a_k$, называется совокупность векторов

$$\Pi(a_1, ..., a_k) = \{\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_k a_k |\ 0 \leq \alpha_i \leq 1\}.$$

Основанием параллелепипеда называется параллелепипед, построенный на любых $k - 1$ векторах из $a_1, ..., a_k$. Индуктивно определим объем $k$-мерного параллелепипеда:

1) $V(a_1) = ||a_1||$;

2) $V(a_1, ..., a_k) = V(a_1, ..., a_{k-1}) h_k$, где $h_k$ — длина ортогональной составляющей вектора $a_k$ относительно подпространства, натянутого на вектора $a_1, ..., a_{k-1}$.

Доказать, что $V(a_1, ..., a_k) = \sqrt{G(a_1, ..., a_k)}$.

5. Пусть любые два из данных $k$ векторов евклидова пространства $V$ образуют тупой угол. Доказать, что $k \geq 1 + \dim V$.

6. Найти расстояние от функции $(\cos t)^{k+1}$ до линейной оболочки $L$ функций $1, \cos t, \sin t, ..., \cos kt, \sin kt$ в пространстве вещественных непрерывных функций на отрезке $[-\pi, \pi]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt.$$

# 3 Линейные отображения векторных пространств со скалярным произведением

## 3.1 Линейные отображения

Пусть $V_1$ и $V_2$ — произвольные векторные пространства над полем $F$. Отображение $\mathcal{A}: V_1 \mapsto V_2$ называется линейным отображением (гомоморфизмом) векторных пространств, если для любых $a, b \in V_1$ и $\alpha, \beta \in F$ имеет место

$$\mathcal{A}(\alpha a + \beta b) = \alpha \mathcal{A} a + \beta \mathcal{A} b,$$

где $\mathcal{A}a$ и $\mathcal{A}b$ — образы векторов $a$ и $b$ относительно отображения $\mathcal{A}$.

Множество

$$\ker \mathcal{A} = \{u \in V_1 | \mathcal{A}u = 0\}$$

называется *ядром* линейного отображения $\mathcal{A}$. Ядро линейного отображения $\mathcal{A}$ является подпространством в $V_1$. Действительно, пусть $x, y \in \ker \mathcal{A}$. Тогда для любых $\alpha, \beta \in F$ получаем, что

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A} x + \beta \mathcal{A} y = 0.$$

Следовательно, $\alpha x + \beta y \in \ker \mathcal{A}$. Поэтому $\ker \mathcal{A}$ — подпространство в $V_1$.

Линейное отображение $\mathcal{A}$ с нулевым ядром называется *инъективным.*

Множество

$$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{u \in V_2 | u = \mathcal{A}v \text{ для некоторого вектора } v \in V_1\}$$

называется *образом* линейного отображения $\mathcal{A}$. Для подпространства $U \subseteq V_1$ положим

$$\mathcal{A}(U) = \{w \in V_2 | w = \mathcal{A}u \text{ для некоторого вектора } u \in U\}.$$

Подмножество $\mathcal{A}(U)$ является подпространством в $V_2$. Действительно, пусть $u, w \in \mathcal{A}(U)$. Тогда $u = \mathcal{A}x$ и $w = \mathcal{A}y$ для некоторых векторов $x, y \in U$. Поэтому для любых $\alpha, \beta \in F$ получаем

$$\alpha u + \beta w = \alpha \mathcal{A} x + \beta \mathcal{A} y = \mathcal{A}(\alpha x + \beta y) \in \mathcal{A}(U).$$

Как следствие получаем, что $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — подпространство в $V_2$.

Линейное отображение $\mathcal{A}$ называется *сурьективным*, если $\operatorname{Im} \mathcal{A} = V_2$. Линейное отображение $\mathcal{A}$ называется *изоморфизмом* векторных пространств, если оно инъективно и сурьективно.

**Лемма 1.** *Пусть $\mathcal{A}: V_1 \mapsto V_2$ — линейное отображение. Предположим, что $U = \operatorname{Lin}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — линейная оболочка множества векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq V_1$. Тогда $\mathcal{A}(U) = \operatorname{Lin}(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n)$. В частности, $\dim \mathcal{A}(U) \leq \dim U$.*

Доказательство. Пусть $w \in \mathcal{A}(U)$. Тогда $w = \mathcal{A}u$ для некоторого вектора $u \in U$. Поскольку $u \in U$, то

$$u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. По определению линейного отображения получаем

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 \mathcal{A} e_1 + \ldots + \alpha_n \mathcal{A} e_n.$$

Поскольку $\mathcal{A}u \in \mathcal{A}(U)$, то $\mathcal{A}(U) \subseteq \operatorname{Lin}(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n)$. Так как $e_1, \ldots e_n \in U$, то $\mathcal{A}e_1, \ldots \mathcal{A}e_n \in \mathcal{A}(U)$. Следовательно,

$$\mathcal{A}(U) = \operatorname{Lin}(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n).$$

Выберем в $\{e_1, \ldots, e_n\}$ максимальную независимую подсистему векторов $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}$. Тогда $\dim U = k$. Так как

$$U = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_n) = \mathrm{Lin}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}),$$

то

$$\mathcal{A}(U) = \mathrm{Lin}(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n) = \mathrm{Lin}(\mathcal{A}e_{i_1}, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_{i_k}).$$

Поэтому

$$\dim \mathcal{A}(U) = \dim \mathrm{Lin}(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n) \leq \dim \mathrm{Lin}(\mathcal{A}e_{i_1}, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_{i_k}) \leq k = \dim U.$$

Следовательно, $\dim \mathcal{A}(U) \leq \dim U$.

Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — линейное отображение конечномерного векторного пространства $V$. Тогда число $rk(\mathcal{A}) = \dim \mathrm{Im}\mathcal{A}$ называется *рангом*, а число $d(\mathcal{A}) = \dim \ker \mathcal{A}$ называется *дефектом* линейного отображения $\mathcal{A}$. Справедлива следующая

**Лемма 2.** *Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — линейное отображение конечномерного векторного пространства $V$. Тогда размерность $V$ равна сумме ранга и дефекта линейного отображения $\mathcal{A}$, т.е.*

$$\dim V = rk(\mathcal{A}) + d(\mathcal{A}).$$

Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_k$ — базис подпространства $\mathrm{Im}\mathcal{A}$. Тогда $k = rk(\mathcal{A})$. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — такие векторы пространства $V$, что $u_1 = \mathcal{A}v_1, \ldots, u_k = \mathcal{A}v_k$. Положим $U = Lin(v_1, \ldots, v_k)$. Покажем, что $U \cap \ker(\mathcal{A}) = 0$. Предположим, что

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k \in \ker(\mathcal{A}),$$

для некоторых коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$. Тогда получаем

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k = \alpha_1 \mathcal{A}v_1 + \ldots + \alpha_k \mathcal{A}v_k = \mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) = 0.$$

Так как векторы $u_1, \ldots, u_k$ — линейно независимы, то $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_k = 0$. Поэтому $U \cap \ker(\mathcal{A}) = 0$.

Рассмотрим произвольный вектор $u$ пространства $V$. Тогда $\mathcal{A}u \in \mathrm{Im}\mathcal{A}$ и

$$\mathcal{A}u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k,$$

для некоторых коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$. Положим

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k.$$

Тогда

$$\mathcal{A}(u - v) = \mathcal{A}u - \mathcal{A}v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k - \mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) =$$

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k - (\alpha_1 \mathcal{A}v_1 + \ldots + \alpha_k \mathcal{A}v_k) = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k - (\alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_k u_k) = 0.$$

Поэтому $u - v \in \ker(\mathcal{A})$. Следовательно, $V = U \oplus \ker(\mathcal{A})$. Отсюда получаем, что

$$\dim V = \dim U + \dim \ker(\mathcal{A}) = rk(\mathcal{A}) + d(\mathcal{A}).$$

Пусть $U$ — подпространство в $V_1$ и $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$ — линейное отображение. Тогда $\mathcal{A}$ задает линейное отображение $\mathcal{A}|_U : U \mapsto V_2$, определенное правилом $\mathcal{A}|_U x = \mathcal{A}x$, где $x \in U$. Линейное отображение $\mathcal{A}|_U$ называется ограничением $\mathcal{A}$ на подпространство $U$.

Множество линейных отображений $V_1 \mapsto V_2$ обозначим через $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$. На этом множестве можно ввести структуру векторного пространства, определив операцию сложения двух элементов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ как $(\mathcal{A}+\mathcal{B})v = \mathcal{A}v + \mathcal{B}v$, а умножения на скаляр $\alpha \in F$ как $(\alpha\mathcal{A})v = \alpha(\mathcal{A}v)$, здесь $v \in V_1$.

Элементы пространства $\mathrm{Hom}(V, V)$ будем называть *линейными преобразованиями* или *линейными операторами* векторного пространства $V$.

Изоморфизм эрмитовых (евклидовых) пространств $V_1$ и $V_2$ — это изоморфизм $\mathcal{A}$ векторных пространств $V_1$ и $V_2$ с дополнительным свойством

$$(a, b)_1 = (\mathcal{A}a, \mathcal{A}b)_2, \ \forall a, b \in V_1,$$

здесь $(\ ,\ )_1$ и $(\ ,\ )_2$ — скалярные произведения в $V_1$ и $V_2$.

**Теорема 1.** *Эрмитовы (евклидовы) пространства размерности $n$ изоморфны стандартному эрмитову (евклидову) пространству $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$). Два эрмитовых (евклидовых) пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.*

Доказательство. Пусть $V$ — эрмитово пространство и $\dim V = n$. Выберем ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства $V$. Определим линейное отображение $\mathcal{A}$ между $V$ и $\mathbb{C}^n$, полагая

$$\mathcal{A} : a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Тогда $\mathcal{A}$ — изоморфизм векторных пространств $V$ и $\mathbb{C}^n$. В силу леммы 2.2.2 получаем

$$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i} = (\mathcal{A}a, \mathcal{A}b).$$

Случай евклидового пространства разбирается аналогично.

Отсюда следует, что два эрмитовых (евклидовых) пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.

Пусть $V$ — конечномерное векторное пространство с базисом $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ и $x$ — вектор из $V$. Тогда

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

где $x_1, \ldots, x_n \in F$. Через $x_e$ будем обозначать столбец, состоящий из координат $x_1, \ldots, x_n$ вектора $x$ в базисе $e$.

**Лемма 3.** (Рисса) *Пусть $V$ — конечномерное эрмитово (евклидово) пространство и $f : V \mapsto F$ — линейное отображение. Тогда существует единственный вектор $y$ пространства $V$ такой, что $f(x) = (x, y)$.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис пространства $V$ и $\overline{f(e_1)}, \ldots, \overline{f(e_n)}$ — сопряженные к числам $f(e_1), \ldots, f(e_n)$. Положим

$$y = \overline{f(e_1)} e_1 + \ldots + \overline{f(e_n)} e_n.$$

Тогда для любого $i = 1, \ldots, n$

$$(e_i, y) = (e_i, \overline{f(e_1)} e_1 + \ldots + \overline{f(e_n)} e_n) = f(e_1)(e_i, e_1) + \ldots + f(e_n)(e_i, e_n) = f(e_i)(e_i, e_i) = f(e_i).$$

Поэтому для любого $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ получаем

$$f(x) = \alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_n f(e_n) = \alpha_1 (e_1, y) + \ldots + \alpha_n (e_n, y) = (\alpha_1 e_1, y) + \ldots + (\alpha_n e_n, y) = (x, y).$$

Пусть $z$ — другой вектор, для которого $f(x) = (x, z)$. Тогда

$$(x, y - z) = (x, y) - (z, x) = f(x) - f(x) = 0$$

для любого $x \in V$. Отсюда следует, что $y = z$.

## 3.2 Линейные отображения и матрицы

Пусть $V_1$ и $V_2$ — векторные пространства размерностей $m$ и $n$ соответственно. Зафиксируем $e_1, \ldots, e_m$ — базис пространства $V_1$ и $f_1, \ldots, f_n$ — базис пространства $V_2$. Тогда для каждого $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ имеем

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}e_1 = \alpha_{11}f_1 + \ldots + \alpha_{i1}f_i + \ldots + \alpha_{n1}f_n \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\mathcal{A}e_j = \alpha_{1j}f_1 + \ldots + \alpha_{ij}f_i + \ldots + \alpha_{nj}f_n \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\mathcal{A}e_m = \alpha_{1m}f_1 + \ldots + \alpha_{im}f_i + \ldots + \alpha_{nm}f_n,
\end{aligned}$$

где для любых индексов $i, j$ скаляры $\alpha_{ij} \in F$. Поставим в соответствие линейному отображению $\mathcal{A}$ матрицу

$$A_f^e = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{i1} & \ldots & \alpha_{im} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}.$$

Как известно, это сопоставление является изоморфизмом векторных пространств $\mathrm{Hom}(V_1.V_2)$ и $M_{n,m}(F)$ — множество матриц размера $n \times m$. Следовательно, $\dim \mathrm{Hom}(V_1.V_2) = nm$. Предыдущую систему равенств можно переписать в следующей матричной форме

$$(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_m) = (f_1, \ldots, f_n)A.$$

Пусть $x$ — вектор из $V_1$. Тогда

$$x = x_1e_1 + \ldots + x_me_m,$$

где $x_1, \ldots, x_m \in F$. Для матрицы $A = (\alpha_{ij})$ из $M_{n,m}(F)$ рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$, заданное матрицей $A$, т.е. $\mathcal{A}$ задано правилом

$$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^{m}(\alpha_{1i}x_i)f_1 + \ldots + \sum_{i=1}^{m}(\alpha_{ni}x_i)f_n.$$

Если

$$y = \mathcal{A}x = y_1f_1 + \ldots + y_nf_n,$$

где $y_1, \ldots, y_n \in F$, то вектор-столбцы $x_e$ и $\mathcal{A}x_f$ векторов $x$ и $\mathcal{A}x$ в базисах $e_1, \ldots, e_m$ и $f_1, \ldots, f_n$ связаны равенством

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix}$$

или тоже самое $y_f = Ax_e$.

Если $V_1 = V_2$, а базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ совпадают, то матрицу преобразования $\mathcal{A}$ обозначим через $A_e$.

**Теорема 1.** *Пусть $V$ — конечномерное векторное пространство, $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — линейное преобразование. Рассмотрим два базиса $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ пространства $V$. Тогда матрицы $A_e$ и $A_f$ преобразования $\mathcal{A}$ в этих базисах связаны равенством*

$$A_f = T^{-1} A_e T,$$

*где $T$ — матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $f_1, \ldots, f_n$.*

Доказательство. Пусть $T = (t_{ij})$, $A_e = (\alpha_{ij})$, $A_f = (\beta_{ij})$. Тогда базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ пространства $V$ связаны равенствами

$$\begin{aligned} &f_1 = t_{11}e_1 + \ldots + t_{n1}e_n \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &f_n = t_{1n}e_1 + \ldots + t_{nn}e_n. \end{aligned}$$

В матричной форме эту систему равенств можно записать как

$$(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)T.$$

Подействуем на обе части каждого равенства преобразованием $\mathcal{A}$, получим

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}f_1 = t_{11}\mathcal{A}e_1 + \ldots + t_{n1}\mathcal{A}e_n \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &\mathcal{A}f_n = t_{1n}\mathcal{A}e_1 + \ldots + t_{nn}\mathcal{A}e_n \end{aligned}$$

или в матричной форме $(\mathcal{A}f_1, \ldots, \mathcal{A}f_n) = (\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n)T$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\beta_{11}f_1 + \ldots + \beta_{n1}f_n = t_{11}(\alpha_{11}e_1 + \ldots + \alpha_{n1}e_n) + \ldots + t_{n1}(\alpha_{1n}e_1 + \ldots + \alpha_{nn}e_n) \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &\beta_{1n}f_1 + \ldots + \beta_{nn}f_n = t_{1n}(\alpha_{11}e_1 + \ldots + \alpha_{n1}e_n) + \ldots + t_{nn}(\alpha_{1n}e_1 + \ldots + \alpha_{nn}e_n). \end{aligned}$$

Подставляя вместо $f_1, \ldots, f_n$ их выражения через $e_1, \ldots, e_n$, получаем

$$\begin{aligned} &(\sum_{i=1}^n t_{1i}\beta_{i1})e_1 + \ldots + (\sum_{i=1}^n t_{ni}\beta_{i1})e_n = (\sum_{i=1}^n \alpha_{1i}t_{i1})e_1 + \ldots + (\sum_{i=1}^n \alpha_{ni}t_{i1})e_n \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &(\sum_{i=1}^n t_{1i}\beta_{in})e_1 + \ldots + (\sum_{i=1}^n t_{ni}\beta_{in})e_n = (\sum_{i=1}^n \alpha_{1i}t_{in})e_1 + \ldots + (\sum_{i=1}^n \alpha_{ni}t_{in})e_n. \end{aligned}$$

В матричной форме эти равенства можно записать как

$$(e_1, \ldots, e_n)(TA_f) = (e_1, \ldots, e_n)(A_eT).$$

Отсюда получаем $TA_f = A_eT$. Следовательно, $A_f = T^{-1}A_eT$.

Упражнение. *Пусть $V$ — конечномерное векторное пространство и $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ — два базиса $V$. Пусть $x$ — вектор из $V$, $T$ — матрица перехода от базиса $e$ к $f$. Доказать, что $x_e = Tx_f$.*

Мы будем отождествлять вектор $x$ конечномерного пространства $V$ с его вектор-столбцом в некотором фиксированном базисе $e$. Если $\mathcal{A}$ — линейное преобразование пространства $V$ и $A$ — его матрица в базисе $e$, то допустима запись $\mathcal{A}x = Ax$.

На векторном пространстве $\mathrm{Hom}(V, V)$ введем операцию умножения линейных преобразований, полагая $(\mathcal{A}\mathcal{B})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$. Если векторное пространство $V$ — конечномерно и

$A$, $B$ — матрицы линейных преобразований $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ в некотором базисе, то $AB$ — матрица линейного преобразования $\mathcal{AB}$ в том же базисе. Действительно, для вектора $x$ мы имеем $\mathcal{A}x = Ax$ и $\mathcal{B}x = Bx$. Тогда

$$\mathcal{AB}x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x) = A(Bx) = (AB)x.$$

В заключение этого параграфа приведем алгоритм поиска ядра и образа линейного преобразования.

Пусть $A$ — матрица размера $n \times m$. *Элементарными преобразованиями* столбцов матрицы $A$ являются следующие преобразования

1) Элементарное преобразование типа I меняет в матрице $A$ местами $i$-тый и $k$-тый столбцы.

2) Элементарное преобразование типа II состоит в умножении $i$-ого столбца матрицы $A$ на скаляр $c \in F$ и прибавлении его к $k$-ому столбцу.

Аналогичным образом вводятся элементарные преобразования строк матрицы.

Рассмотрим матрицу $A^\top$, транспонированную к матрице $A$. Если матрица $B$ получена из матрицы $A$ с помощью элементарного преобразования $i$-ого и $k$-ого столбцов, то матрица $B^\top$ получена из матрицы $A^\top$ с помощью того же самого элементарного преобразования, примененного к $i$-той и $k$-той строкам.

Каждую матрицу $A$ элементарными преобразованиями столбцов можно привести к ступенчатой матрице. Поэтому матрицу $A^\top$ элементарными преобразованиями строк можно привести к ступенчатой матрице

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1k_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1m} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{2k_2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{rk_r} & \cdots & a_{rm} \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix},$$

где $a_{1k_1}, \ldots, a_{rk_r} \neq 0$, $1 \leq r \leq n$ и $1 \leq k_1 < \ldots < k_r \leq m$.

Элементарные преобразования типа I и II строк (столбцов) матрицы индуцируют отношение эквивалентности на множестве матриц размера $n \times m$, которое будем обозначать $A \sim B$ для матриц $A$ и $B$.

Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — линейное преобразование конечномерного векторного пространства размерности $n$, заданное матрицей $A$ порядка $n$ в стандартном базисе. Образуем матрицу $\begin{pmatrix} A^\top & | & E \end{pmatrix}$, где $E$ — единичная матрица порядка $n$. Элементарными преобразованиями строк приведем эту матрицу к виду $\begin{pmatrix} C & | & B \end{pmatrix}$, где $C$ — ступенчатая матрица. Тогда ненулевые строки матрицы $C$, записанные как вектор-столбцы, образуют базис $\mathrm{Im}\mathcal{A}$, а все строки матрицы $B$, имеющие нулевое продолжение в $C$, записанные как вектор-столбцы, образуют базис $\ker \mathcal{A}$. Корректность алгоритма следует из леммы 1.2.

Пример. Найдем образ и ядро линейного преобразования, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 10 & 8 \\ 5 & 11 & 16 & 12 \end{pmatrix}$$

Образуем матрицу

$$\begin{pmatrix} A^\top & | & E \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 11 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 10 & 16 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Умножим 1-ю строку последовательно на $-2$, $-3$, $-2$ и, сложив ее с 2-ой, 3-ей, 4-ой строками, получим

$$\left(A^\top \;\mid\; E\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Умножим 2-ю строку последовательно на $-1$, $-2$ и сложим ее с 3-ей, 4-ой строками, получим

$$\left(A^\top \;\mid\; E\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Тогда вектор-столбцы $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\5\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\-3\\1\\1\end{pmatrix}$ образуют базис $\mathrm{Im}\mathcal{A}$, а вектор-столбцы $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}2\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$ образуют базис $\ker\mathcal{A}$.

Упражнение. *Описать алгоритм нахождения образа и ядра линейного преобразования конечномерного векторного пространства, заданного матрицей $A$ в произвольном базисе.*

## 3.3 Характеристический многочлен

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица порядка $n$, $E$ — единичная матрица и $t$ — переменная. Многочлен

$$\chi_A(t) = \det(tE - A) = (-1)^n \det(A - tE) = (-1)^n \det \begin{pmatrix} a_{11} - t & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$$

называется *характеристическим* многочленом матрицы $A$.

Напомним, что матрицы $A$ и $B$ *подобны*, если $A = T^{-1}BT$ для некоторой невырожденной матрицы $T$, т.е. матрицы с ненулевым определителем.

Упражнение. *Напомним, что след квадратной матрицы определяется равенством*

$$Tr(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}.$$

*Доказать, что следы и определители подобных матриц совпадают.*

Для подобных матриц $A$ и $B$ имеет место

$$\chi_A(t) = \det(tE - A) = \det(tE - T^{-1}BT) = \det(T)^{-1}\det(tE - B)\det(T) = \chi_B(t).$$

Следовательно, характеристические многочлены подобных матриц совпадают.

Таким образом, можно говорить о характеристическом многочлене $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ линейного преобразования $\mathcal{A}$ конечномерного векторного пространства $V$. А именно, положим

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_A(t)$, где $A$ — матрица линейного преобразования $\mathcal{A}$ в некотором базисе пространства $V$. Пусть $\mathcal{A}$ — линейное преобразование векторного пространства $V$. Тогда ненулевой вектор $v$ из $V$ называется *собственным* вектором линейного преобразования $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}v = \alpha v$, где $\alpha$ — скаляр из поля $F$. При этом скаляр $\alpha$ называется *собственным значением* линейного преобразования $\mathcal{A}$.

Пусть
$$V_\alpha = \{x \in V | \mathcal{A}x = \alpha x\}.$$
Тогда $V_\alpha = \ker(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ — тождественное линейное преобразование. Векторное подпространство $V_\alpha$ называется пространством собственных векторов, отвечающих собственному значению $\alpha$.

**Лемма 1.** *Пусть $\mathcal{A}$ — линейное преобразование конечномерного векторного пространства. Тогда скаляр $\alpha$ — собственное значение $\mathcal{A}$ в том и только в том случае, когда $\chi_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$.*

Доказательство. Пусть $A$ — матрица, соответствующая преобразованию $\mathcal{A}$ в некотором базисе $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, и $x$ — собственный вектор для $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению $\alpha$. Тогда $(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})x = 0$. Поэтому линейная однородная система уравнений $(A - \alpha E)X = 0$ имеет ненулевое решение $x$, здесь мы отождествили вектор $x$ с его вектор-столбцом в базисе $e$. В этом случае $\det(A - \alpha E) = 0$ (см. например, [1, 5, 2, 6]). Следовательно, $\chi_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$.

Пусть $\chi_{\mathcal{A}}(\alpha) = 0$. Тогда $\det(A - \alpha E) = 0$. Следовательно, найдется такой ненулевой вектор $x$, что $(A - \alpha E)x = 0$. Поэтому $\mathcal{A}x = \alpha x$.

Подпространство $U$ в $V$ называется *инвариантным* относительно линейного преобразования $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}(U) \subseteq U$.

Примерами подпространств, инвариантных относительно линейного преобразования $\mathcal{A}$, являются само подпространство $V$, нулевое подпространство, $\ker \mathcal{A}$, $\operatorname{Im} \mathcal{A}$. Если $\alpha$ — собственное значение для $\mathcal{A}$, то подпространство $V_\alpha$ — инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

**Лемма 2.** *Пусть $V$ — конечномерное векторное пространство, $\mathcal{A}$ — его линейное преобразование и $U_1, \ldots, U_n$ — инвариантные относительно $\mathcal{A}$ подпространства. Предположим, что*
$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n.$$
*Тогда $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_1(t) \ldots \chi_n(t)$ — произведение характеристических многочленов ограничения линейного преобразования $\mathcal{A}$ на подпространства $U_1, \ldots, U_n$.*

Доказательство. В каждом подпространстве $U_i$ выберем базис $u_{i1}, \ldots, u_{ik_i}$. Пусть $A_i$ — матрица ограничения линейного преобразования $\mathcal{A}$ на подпространство $U_i$ в базисе $u_{i1}, \ldots, u_{ik_i}$. Тогда в базисе $u_{11}, \ldots, u_{1k_1}, u_{21}, \ldots, u_{2k_2}, \ldots, u_{n1}, \ldots, u_{nk_n}$ пространства $V$ матрица $A$ линейного преобразования $\mathcal{A}$ имеет клеточно-диагональный вид
$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}.$$
Пусть $m = \dim V$. Тогда $m = k_1 + \ldots + k_n$ и
$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^m \det(A - tE) = (-1)^m \det \begin{pmatrix} A_1 - tE_{k_1} & & & \\ & A_2 - tE_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n - tE_{k_n} \end{pmatrix} =$$

$(-1)^m \det(A_1 - tE_{k_1}) \dots \det(A_n - tE_{k_n}) = (-1)^{k_1} \det(A_1 - tE_{k_1}) \dots (-1)^{k_n} \det(A_n - tE_{k_n}) = \chi_1(t) \dots \chi_n(t),$

где $E_{k_1}, \dots, E_{k_n}$ — единичные матрицы порядка $k_1, \dots, k_n$ соотвественно.

**Лемма 3.** *Пусть $V$ — векторное пространство и $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — его линейные преобразования. Пусть $\alpha$ — собственное значение преобразования $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, то подпространство $V_\alpha$ инвариантно относительно преобразования $\mathcal{B}$.*

Доказательство. Пусть $x \in V_\alpha$. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}x) = (\mathcal{AB})x = (\mathcal{BA})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) = \alpha(\mathcal{B}x).$$

Следовательно, $\mathcal{B}x \in V_\alpha$.

**Теорема 1.** (Гамильтона-Кэли).*Линейное преобразование $\mathcal{A}$ конечномерного векторного пространства и соответствующая ему матрица $A$ аннулируют свой характеристический многочлен $\chi_\mathcal{A}(t)$, т.е. $\chi_\mathcal{A}(\mathcal{A}) = \chi_A(A) = 0$.*

Доказательство теоремы Гамильтона-Кэли можно найти в [1, 5, 2, 6].

Упражнение. *Пусть $V$ — конечномерное векторное пространство над полем вещественных чисел и $\mathcal{A}$ — линейное преобразование пространства $V$. Доказать, что в $V$ существует одномерное или двухмерное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$.*

В дальнейшем множество собственных значений линейного преобразования $\mathcal{A}$ будем обозначать через $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$.

## 3.4 Сопряженные линейные отображения

Пусть $V_1$ и $V_2$ — эрмитовы (евклидовы) пространства со скалярными произведениями $(\,,)_1$ и $(\,,)_2$. Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$. Линейное отображение $\mathcal{A}^* : V_2 \mapsto V_1$ называется *сопряженным* к $\mathcal{A}$, если

$$(\mathcal{A}x_1, x_2)_2 = (x_1, \mathcal{A}^* x_2)_1$$

для любых $x_1 \in V_1$ и $x_2 \in V_2$.

Если $A$ — матрица из $M_{n,m}(\mathbb{C})$, то через $A^*$ обозначим сопряженно-транспонированную матрицу к матрице $A$, т.е. $A^* = \overline{A}^\top$, где матрица $\overline{A}$ получена из матрицы $A$ комплексным сопряжением каждого его элемента. Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$. Тогда, как легко видеть, $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$. Поэтому $\det(A^*) = \det(\overline{A}^\top) = \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$. Если $A, B$ — матрицы из $M_n(\mathbb{C})$, то $(AB)^* = B^* A^*$.

Упражнение. *Пусть $A$ — невырожденная матрица. Доказать, что $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

**Теорема 1.** *$\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$ — линейное отображение эрмитовых (евклидовых) пространств. Если существует линейное отображение $\mathcal{A}^* : V_2 \mapsto V_1$ сопряженное к $\mathcal{A}$, то оно – единственно. Пусть $V_1$ и $V_2$ — пространства конечной размерности. Тогда отображение $\mathcal{A}^*$ всегда существует. При этом, если $A$ — матрица линейного отображения $\mathcal{A}$, заданная в некоторых ортонормированных базисах эрмитовых пространств $V_1$ и $V_2$, то $A^*$ — матрица линейного отображения $\mathcal{A}^*$, заданная в тех же ортонормированных базисах эрмитовых пространств $V_2$ и $V_1$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ имеет два сопряженных линейных отображения $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{B}$ — отображения пространства $V_2$ в пространство $V_1$, и для любых векторов $x \in V_1, y \in V_2$ имеем

$$(x, \mathcal{A}^* y)_1 = (\mathcal{A}x, y)_2 = (x, \mathcal{B}y)_1.$$

Поэтому $(x, (\mathcal{A}^* - \mathcal{B})y)_1 = 0$. Следовательно, $\mathcal{A}^* y = \mathcal{B}y$ для любого вектора $y \in V_2$, т.е. $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}$.

Пусть размерности пространств $V_1$ и $V_2$ конечны. Зафиксируем в пространстве $V_1$ ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_m$, а в $V_2$ ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$. Пусть в этих базисах линейному отображению $\mathcal{A}$ соответствует матрица

$$A_f^e = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A}^* : V_2 \mapsto V_1$, заданное равенствами

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}^* f_1 = \overline{\alpha}_{11} e_1 + \ldots + \overline{\alpha}_{1m} e_m \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &\mathcal{A}^* f_n = \overline{\alpha}_{n1} e_1 + \ldots + \overline{\alpha}_{nm} e_m. \end{aligned}$$

Тогда для элементов $e_i, f_j$ получаем,

$$(\mathcal{A}e_i, f_j)_2 = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} f_k, f_j, )_2 = (\alpha_{ji} f_j, f_j, )_2 = (f_j, \overline{\alpha}_{ji} f_j)_2 =$$

$$(e_i, \overline{\alpha}_{ji} e_i)_1 = (e_i, \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_{jk} e_k)_1 = (e_i, \mathcal{A}^* f_j)_1.$$

Отсюда следует, что $(\mathcal{A}x, y)_2 = (x, \mathcal{A}^* y)_1$ для любых векторов $x \in V_1, y \in V_2$. Следовательно, $\mathcal{A}^*$ — линейное отображение, сопряженное к $\mathcal{A}$. По построению $\mathcal{A}^*$ получаем, что $A^*$ — матрица линейного отображения $\mathcal{A}^*$ в базисах $f_1, \ldots, f_n$ и $e_1, \ldots, e_m$.

**Следствие 1.** *Пусть $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис и $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ — произвольный базис эрмитова (евклидова) пространства $V$. Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — линейное преобразование и $A$ — матрица преобразования $\mathcal{A}$ в базисе $f$. Если $B$ — матрица преобразования $\mathcal{A}^*$ в базисе $f$, то*

$$B = (T^* T)^{-1} A^* (T^* T),$$

*где $T$ — матрица перехода от базиса $e$ к базису $f$.*

Доказательство. Пусть $A_e$ — матрица преобразования $\mathcal{A}$ в базисе $e$. По теореме 1 $A_e^*$ — матрица преобразования $\mathcal{A}^*$ в базисе $e$. По теореме 2.1 имеем $B = T^{-1} A_e^* T$ и $A = T^{-1} A_e T$. Отсюда $A_e = TAT^{-1}$. Тогда

$$B = T^{-1} (TAT^{-1})^* T = T^{-1} (T^*)^{-1} A^* T^* T = (T^* T)^{-1} A^* (T^* T).$$

Упражнение. *Пусть $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ — произвольный базис эрмитова пространства $V$. Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — линейное преобразование и $A$ — матрица преобразования $\mathcal{A}$ в базисе $f$, а $B$ — матрица преобразования $\mathcal{A}^*$ в базисе $f$. Доказать, что*

$$B = G(f_1, f_2, .., f_n)^{-1} A^* G(f_1, f_2, .., f_n),$$

*где $G(f_1, f_2, .., f_n)$ — матрица Грама системы векторов базиса $f$.*

**Следствие 2.** *Пусть $V$ — конечномерное эрмитово пространство, и $\mathcal{A}$ — его линейное преобразование. Если $\alpha$ — собственное значение преобразования $\mathcal{A}$, то $\overline{\alpha}$ — собственное значение преобразования $\mathcal{A}^*$.*

Доказательство. Пусть $A$ — матрица преобразования $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе пространства $V$. Тогда $A^*$ — матрица преобразования $\mathcal{A}^*$ в том же базисе. Так как $\alpha$ — собственное значение преобразования $\mathcal{A}$, то по лемме 3.1 $\det(A - \alpha E) = 0$. Тогда

$$\det(A^* - \overline{\alpha}E) = \det((A - \alpha E)^*) = \overline{\det(A - \alpha E)} = 0.$$

Следовательно, $\chi_{\mathcal{A}^*}(\overline{\alpha}) = 0$. В силу леммы 3.1 $\overline{\alpha}$ — собственное значение преобразования $\mathcal{A}^*$.

**Лемма 1.** *Для любого линейного преобразования $\mathcal{A}$ сопряженное преобразование $\mathcal{A}^*$ обладает следующими свойствами:*

(i) $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$,

(ii) $(\alpha\mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^*$, где $\alpha \in \mathbb{C}$,

(iii) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$,

(iv) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$.

Доказательство. По определению сопряженного преобразования для любых $x, y \in V$ имеем

$$(x, (\mathcal{A}^*)^* y) = (\mathcal{A}^* x, y) = \overline{(y, \mathcal{A}^* x)} = \overline{(\mathcal{A}y, x)} = (x, \mathcal{A}y).$$

Отсюда получаем (i).

Аналогично

$$(x, (\alpha\mathcal{A})^* y) = (\alpha\mathcal{A}x, y) = \alpha(\mathcal{A}x, y) = (x, \overline{\alpha}\mathcal{A}^* y).$$

Поэтому $(\alpha\mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^*$.

Докажем (iv). Мы имеем

$$(x, (\mathcal{A}\mathcal{B})^* y) = ((\mathcal{A}\mathcal{B})x, y) = (\mathcal{A}(\mathcal{B}x), y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^* y) = (x, \mathcal{B}^*(\mathcal{A}^* y)) = (x, (\mathcal{B}^*\mathcal{A}^*)y).$$

Поэтому $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$.

**Лемма 2.** *Пусть $V$ — конечномерное эрмитово (евклидово) пространство, и $\mathcal{A}$ — его линейное преобразование. Пусть подпространство $U$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Тогда ортогональное дополнение $U^\perp$ — инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$.*

Доказательство. По условию леммы $\mathcal{A}u \in U$ для любого $u \in U$. Пусть $x \in U^\perp$. Тогда для любого $u \in U$

$$(u, \mathcal{A}^* x) = (\mathcal{A}u, x) = 0.$$

Следовательно, $\mathcal{A}^* x \in U^\perp$. Поэтому $U^\perp$ — инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$.

Пусть $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$ — линейное отображение эрмитовых пространств, а $\mathcal{A}^* : V_2 \mapsto V_1$ — сопряженное к $\mathcal{A}$ отображение. Тогда $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ — линейное преобразование пространства $V_1$, а $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ — линейное преобразование пространства $V_2$.

**Лемма 3.** *Пусть $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$ — линейное отображение конечномерных эрмитовых (евклидовых) пространств. Тогда* $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}\mathcal{A}^*) = \mathrm{Sp}(\mathcal{A}^*\mathcal{A})$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A}^*\mathcal{A})$. Тогда $\mathcal{A}^*\mathcal{A}x = \alpha x$ для ненулевого вектора $x \in V_1$. Предположим, что $\mathcal{A}x \neq 0$. Так как $\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{A}x = \alpha\mathcal{A}x$, то $\mathcal{A}x$ — собственный вектор преобразования $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, отвечающий собственному значению $\alpha$. Следовательно, $\alpha \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)$.

Предположим, что $\mathcal{A}x = 0$. Тогда $\alpha = 0$. Если $A$ — матрица линейного отображения $\mathcal{A}$, заданная в некоторых ортонормированных базисах векторных пространств $V_1$ и $V_2$, то $Ax = 0$. Следовательно, $\det(A) = 0$. Тогда $\det(A^*) = \overline{\det(A)} = 0$. Поэтому $A^* y = 0$ для ненулевого вектора $y \in V_2$. Следовательно, $\mathcal{A}^* y = 0$. Тогда $\mathcal{A}\mathcal{A}^* y = 0$. Поэтому $\alpha \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)$.

Таким образом, $\mathrm{Sp}(A^*A) \subseteq \mathrm{Sp}(AA^*)$. Аналогично получаем, что $\mathrm{Sp}(AA^*) \subseteq \mathrm{Sp}(A^*A)$.

## 3.5 Эрмитовы, симметрические преобразования

Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — линейное преобразование эрмитова пространства. Тогда $\mathcal{A}$ называется *эрмитовым (самосопряженным)* преобразованием, если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. В случае евклидовых пространств $\mathcal{A}$ называется *симметрическим* преобразованием.

Пусть $A$ — матрица из $M_n(\mathbb{C})$. Тогда $A$ называется *эрмитовой* матрицей, если $A^* = A$. В вещественном случае эрмитова матрица называется *симметрической*.

Пусть $V$ — эрмитово (евклидово) пространство размерности $n$. Тогда матрица эрмитова (симметрического) преобразования в ортонормированном базисе является эрмитовой (симметрической). Если $A$ — эрмитова (симметрическая) матрица порядка $n$, то $\mathcal{A} : V \mapsto V$, заданное правилом $\mathcal{A}x = Ax$, является эрмитовым (симметрическим) преобразованием.

**Лемма 1.** *Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — эрмитово (симметрическое) преобразование конечномерного эрмитова (евклидова) пространства. Тогда собственные значения преобразования $\mathcal{A}$ вещественны.*

Доказательство. Пусть $x$ — собственный вектор преобразования $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению $\alpha$. Тогда

$$\overline{\alpha}(x, x) = (x, \alpha x) = (x, \mathcal{A}x) = (x, \mathcal{A}^*x) = (\mathcal{A}x, x) = (\alpha x, x) = \alpha(x, x).$$

Так как $x \neq 0$, то $\alpha = \overline{\alpha}$. Поэтому $\alpha$ — вещественное число.

Пусть $V$ — евклидово пространство. Рассмотрим пространство $V_{\mathbb{C}}$ — комплексификацию пространства $V$. Если $A$ — матрица преобразования $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе пространства $V$, то матрица $A$ индуцирует в эрмитовом пространстве $V_{\mathbb{C}}$ эрмитово преобразование. По предыдущему, собственные значения этого преобразования, а следовательно, и матрицы $A$ — вещественны. Поэтому собственные значения преобразования $\mathcal{A}$ вещественны.

Приведем еще одно доказательство леммы 1, основанное на принципе максимума из математического анализа.

Пусть $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис евклидова пространства $V$ и $A$ — матрица преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе. Если $x_e$ — вектор столбец из координат вектора $x$ в базисе $e$, то $Ax_e$ — вектор столбец из координат вектора $\mathcal{A}x$ в том же базисе. Тогда по лемме 2.2.2 $(x, \mathcal{A}x) = x_e^\top Ax_e$. Рассмотрим функцию $f(x_e) = x_e^\top Ax_e$. Тогда $f(x_e)$ — функция, заданная на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}$. Так как $f(x_e)$ — многочлен степени 2 от координат вектора $x$, то функция $f(x_e)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Поэтому, по теореме Больцано-Вейерштрасса, $f(x_e)$ достигает своего максимума $\lambda$ на компакте $S = \{x \in V | \, ||x|| = 1\}$. Следовательно, $(u, \mathcal{A}u) = \lambda$, для некоторого $u \in S$ и $(x, \mathcal{A}x) \leq \lambda$ для всех $x \in S$. Пусть $y$ — ненулевой вектор. Так как $\frac{y}{||y||}$ — вектор длины 1, то $(\frac{y}{||y||}, \mathcal{A}\frac{y}{||y||}) \leq \lambda$. Тогда

$$(y, \mathcal{A}y) \leq \lambda ||y||^2 \text{ для любого вектора } y \text{ и } (u, \mathcal{A}u) = \lambda.$$

Подставим в это неравенство вместо $y$ вектор $u + \epsilon z$, где $\epsilon \in \mathbb{R}$, получим

$$(u + \epsilon z, \mathcal{A}(u + \epsilon z)) \leq \lambda(u + \epsilon z, u + \epsilon z).$$

Отсюда

$$(u, \mathcal{A}u) + \epsilon(u, \mathcal{A}z) + \epsilon(z, \mathcal{A}u) + \epsilon^2(z, \mathcal{A}z) \leq \lambda((u, u) + 2\epsilon(u, z) + \epsilon^2(z, z)).$$

Так как $(u, \mathcal{A}u) = \lambda(u, u)$, то

$$\epsilon(u, \mathcal{A}z) + \epsilon(z, \mathcal{A}u) + \epsilon^2(z, \mathcal{A}z) \leq \lambda(2\epsilon(u, z) + \epsilon^2(z, z)).$$

Так как $\mathcal{A}$ — симметрическое преобразование, то

$$(u, \mathcal{A}z) + (z, \mathcal{A}u) = (u, \mathcal{A}z) + (\mathcal{A}z, u) = 2(u, \mathcal{A}z).$$

Поэтому

$$2\epsilon(u, \mathcal{A}z) + \epsilon^2(z, \mathcal{A}z) \leq \lambda(2\epsilon(u, z) + \epsilon^2(z, z)).$$

Тогда

$$2\epsilon(u, \mathcal{A}z - \lambda z) + \epsilon^2(z, \mathcal{A}z - \lambda z) \leq 0$$

для любого вектора $z$.

Если $\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$, то $\mathrm{Im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = V$ и $u = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})z$, для некоторого вектора $z$. Поэтому

$$2\epsilon(u, u) + \epsilon^2(z, \mathcal{A}z - \lambda z) \leq 0.$$

Выберем положительное число $\epsilon$ так, что $\frac{2(u,u)}{\epsilon} > -(z, \mathcal{A}z - \lambda z)$. Тогда получим

$$2\epsilon(u, \mathcal{A}z - \lambda z) + \epsilon^2(z, \mathcal{A}z - \lambda z) > 0.$$

Следовательно, $\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \neq 0$. Тогда $\lambda$ — собственное значение преобразования $\mathcal{A}$.

Пусть $v$ — собственный вектор преобразования $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению $\lambda$. Рассмотрим подпространства $L$, порожденное вектором $v$. Тогда $V = L + L^\perp$, и по лемме 4.2 подпространство $L^\perp$ инвариантно относительно преобразования $\mathcal{A}$. Применяя индукцию по размерности пространства получаем, что $\mathrm{Sp}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{R}$.

Также отметим, что спектр линейного преобразования $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ неотрицательный, т.е. $\alpha \geq 0$ для любого $\alpha \in \mathrm{Sp}(\mathcal{A}^*\mathcal{A})$ . Действительно, пусть $\alpha$ — собственное значение линейного преобразования $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $v$ — собственный вектор, отвечающий $\alpha$. Тогда

$$\alpha(v, v) = (\alpha v, v) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}v, v) = (\mathcal{A}v, \mathcal{A}v) \geq 0.$$

Следовательно, $\alpha \geq 0$.

**Теорема 1.** *Пусть $V$ — конечномерное эрмитово (евклидово) пространство и $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — эрмитово (симметрическое) преобразование. Тогда все собственные значения преобразования $\mathcal{A}$ — вещественные, характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^{p}(t - \alpha_i)^{n_i}$, и пространство $V = V_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_p}$ — ортогональная сумма, т.е. $V_{\alpha_i} \perp V_{\alpha_j}$ для $i \neq j$ и $\dim V_{\alpha_i} = n_i$. В частности, собственные векторы преобразования $\mathcal{A}$, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{A}$ — эрмитово (симметрическое) преобразование, то $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^{p}(t - \alpha_i)^{n_i}$, где корни $\alpha_i$ — вещественные. Рассмотрим подпространство $V_{\alpha_1}$ собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$, отвечающих собственному значению $\alpha_1$. Тогда $V = V_{\alpha_1} \oplus V_{\alpha_1}^\perp$. Пусть $x \in V_{\alpha_1}, y \in V_{\alpha_1}^\perp$. Тогда

$$(x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*x, y) = (\mathcal{A}x, y) = (\alpha_1 x, y) = 0.$$

Поэтому $V_{\alpha_1}^\perp$ — инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Ограничение линейного преобразования $\mathcal{A} - \alpha_1\mathcal{E}$ на подпространство $V_{\alpha_1}^\perp$ является невырожденным линейным преобразованием. Ясно, что $(t - \alpha_1)^{k_1}$ — характеристический многочлен преобразования $\mathcal{A}|_{V_{\alpha_1}}$, здесь $k_1 = \dim V_{\alpha_1}$. Тогда, в силу леммы 3.2, $k_1 = n_1$ и $\prod_{i=2}^{p}(t - \alpha_i)^{n_i}$ — характеристический многочлен преобразования $\mathcal{A}|_{V_{\alpha_1}^\perp}$. Поскольку $\dim V_{\alpha_1}^\perp < \dim V$, то индукцией по размерности $V$ получаем, что $V_{\alpha_1}^\perp = V_{\alpha_2} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_p}$ — ортогональная сумма, при этом $\dim V_{\alpha_i} = n_i$. Следовательно, $V = V_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_p}$ — ортогональная сумма и $\dim V_{\alpha_i} = n_i$ для каждого $i = 1, \ldots, p$.

Из теоремы 1 получаем

**Следствие 1.** *Для любого эрмитова (симметрического) преобразования $\mathcal{A}$ конечномерного эрмитова (евклидова) пространства $V$ существует ортонормированный базис пространства $V$, состоящий из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$. В этом базисе преобразование $\mathcal{A}$ имеет канонический вид, т.е. его матрица диагональна с вещественными собственными значениями по диагонали.*

Пример. Пусть симметрическое преобразование $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства $V = \mathbb{R}^3$ задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти ортонормированный базис, в котором линейное преобразование $\mathcal{A}$ имеет канонический вид.

Сначала вычислим характеристический многочлен

$$\chi_A(t) = -\det \begin{pmatrix} 11-t & 2 & -8 \\ 2 & 2-t & 10 \\ -8 & 10 & 5-t \end{pmatrix} = (t^2-81)(t-18).$$

Поэтому $\mathrm{Sp}(A) = \{-9, 9, 18\}$.Тогда

$$V = V_{-9} + V_9 + V_{18}.$$

Найдем базис подпространства $V_{-9}$. Элементарными преобразованиями строк матрицы получаем, что

$$(A+9E|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 2 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 10 & 14 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 11 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 54 & 54 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Вектор-столбец $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ образует базис $V_{-9}$. Найдем базис подпространства $V_9$

$$(A-9E|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 10 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Вектор-столбец $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ образует базис $V_9$. Аналогично, вектор-столбец $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ образует базис $V_{18}$.

В ортонормированном базисе $f_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$,$f_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ линейное преобразование $\mathcal{A}$ имеет канонический вид

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

## 3.6 Унитарные и ортогональные преобразования

Линейное преобразование $\mathcal{A}$ эрмитова (евклидова) пространства $V$ называется *унитарным (ортогональным)*, если оно сохраняет скалярное произведение, т.е. $(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b) = (a, b)$ для любых векторов $a, b \in V$.

Ядро унитарного (ортогонального) преобразования равно нулю. Действительно, пусть $a \in \ker \mathcal{A}$. Тогда

$$(a, a) = (\mathcal{A}a, \mathcal{A}a) = 0.$$

Поэтому $a = 0$. Осюда получаем, $\ker \mathcal{A} = 0$.

Если $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированная система векторов эрмитова (евклидова) пространства $V$ и $\mathcal{A}$ — унитарное (ортогональное) преобразование пространства $V$, то $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$ — ортонормированная система векторов $V$. Таким образом, справедлива

**Теорема 1.** *Пусть $\mathcal{A}$ — унитарное (ортогональное) преобразование конечномерного эрмитова (евклидова) пространства $V$. Тогда $\mathcal{A}$ — изоморфизм, и ортонормированная система векторов переходит под действием $\mathcal{A}$ в ортонормированную систему векторов. Обратно, пусть линейное преобразование $\mathcal{A}$ эрмитова (евклидова) пространства $V$ переводит ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ в ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$. Тогда $\mathcal{A}$ — унитарное (ортогональное) преобразование.*

Доказательство. Докажем, что линейное преобразование переводящее ортономированый базис в ортонормированый базис является ортогональным.

Пусть $\mathcal{A}$ переводит ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ в ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$. Тогда $\mathcal{A}e_i = f_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим векторы $a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ и $b = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$. Тогда $\mathcal{A}a = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$ и $\mathcal{A}b = \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_n f_n$. Отсюда получаем,

$$(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b) = \sum_{i=1, j=1}^{n} (\alpha_i f_i, \beta_j f_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i} = (a, b).$$

Следовательно, $\mathcal{A}$ — унитарное (ортогональное) преобразование.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ рассмотрим преобразование

$$\mathcal{A}_\phi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

поворот на угол $\phi$. Тогда для векторов $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ получаем

$$(\mathcal{A}_\phi a, \mathcal{A}_\phi b) = (\begin{pmatrix} a_1\cos\phi - a_2\sin\phi \\ a_1\sin\phi + a_2\cos\phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1\cos\phi - b_2\sin\phi \\ b_1\sin\phi + b_2\cos\phi \end{pmatrix}) =$$

$$(a_1\cos\phi - a_2\sin\phi)(b_1\cos\phi - b_2\sin\phi) + (a_1\sin\phi + a_2\cos\phi)(b_1\sin\phi + b_2\cos\phi) = a_1 b_1 + a_2 b_2 = (a, b).$$

Следовательно, $\mathcal{A}$ — ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^2$.

Приведем еще один пример нетривиального унитарного (ортогонального) преобразования.

Пусть $V$ — эрмитово (евклидово) пространство. Тогда преобразование $\mathcal{A} : x \mapsto -x$ является унитарным (ортогональным).

Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ называется *унитарной* , если $A^* = \overline{A}^\top = A^{-1}$. Вещественная матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ называется *ортогональной*, если $A^\top = A^{-1}$. Как легко видеть, столбцы (строки) унитарной (ортогональной) матрицы образуют ортонормированную систему векторов в стандартном пространстве $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{R}^n)$.

Упражнение. *Доказать, что для унитарной (ортогональной) матрицы $A$ модуль* $|\det(A)| = 1$.

Пусть $V$ — эрмитово (евклидово) пространство размерности $n$. Тогда матрица $A$ унитарного (ортогонального) преобразования $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе является унитарной (ортогональной). Действительно, в силу теоремы 4.1, $A^*$ — матрица преобразования $\mathcal{A}^*$. Поскольку $(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b) = (a, b)$, то $(a, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}b)) = (a, b)$. Отсюда получем, что $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{E}$. Поэтому $A^*A = E$. В частности, $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$. Если $A$— унитарная (ортогональная) матрица порядка $n$, то отображение $\mathcal{A} : V \mapsto V$, заданное правилом $\mathcal{A}x = Ax$, является унитарным (ортогональным) преобразованием пространства $V$.

Поэтому, из теоремы 1 получаем следующее

**Следствие 1.** *Матрица перехода от одного ортонормированного базиса эрмитова (евклидова) пространства к другому является унитарной (ортогональной).*

**Лемма 1.** *Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — унитарное (ортогональное) преобразование. Тогда модули его собственных значений равны 1.*

Доказательство. Пусть $\alpha$ — собственное значение преобразования $\mathcal{A}$ и $x$ — собственный вектор, отвечающий $\alpha$. Если $V$ — эрмитово пространство, то

$$(x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\alpha x, \alpha x) = \alpha\overline{\alpha}(x, x).$$

Следовательно, $\alpha\overline{\alpha} = 1$, т.е. модуль $|\alpha| = 1$.

Для евклидовых пространств $(x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\alpha x, \alpha x) = \alpha^2(x, x)$. Следовательно, $\alpha = \pm 1$.

**Лемма 2.** *Линейное преобразование $\mathcal{A} : V \mapsto V$ эрмитова (евклидова) пространства является унитарным (ортогональным) тогда и только тогда, когда оно сохраняет длину вектора.*

Доказательство. Если $\mathcal{A}$ — унитарное преобразование, то оно сохраняет длину вектора. Обратно, пусть $||\mathcal{A}x|| = ||x||$ для любого $x \in V$. Тогда, ввиду леммы 2.1.3, для любых $x, y \in V$

$$(x, y) = \frac{i||x + y||^2 + ||ix + y||^2 - (i - 1)||x||^2 - (i + 1)||y||^2}{2i}.$$

Отсюда получаем, что

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = \frac{i||\mathcal{A}x + \mathcal{A}y||^2 - ||i\mathcal{A}x + \mathcal{A}y||^2 + (i - 1)||\mathcal{A}x||^2 - (i + 1)||\mathcal{A}y||^2}{2i} =$$

$$\frac{i||\mathcal{A}(x + y)||^2 + ||\mathcal{A}(ix + y)||^2 - (i - 1)||\mathcal{A}x||^2 - (i + 1)||\mathcal{A}y||^2}{2i} =$$

$$\frac{i||x + y||^2 + ||ix + y||^2 - (i - 1)||x||^2 - (i + 1)||y||^2}{2i} = (x, y).$$

Следовательно,

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y).$$

Таким образом, $\mathcal{A}$ — унитарное преобразование. Случай евклидова пространства разбирается аналогично.

**Теорема 2.** *Для любого унитарного преобразования $\mathcal{A}$ конечномерного эрмитова пространства $V$ существует ортонормированный базис пространства $V$, состоящий из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$. В этом базисе преобразование $\mathcal{A}$ имеет канонический вид, т.е. его матрица диагональна с собственными значениями по диагонали. При этом модули этих элементов равны 1.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ — собственные значения преобразования $\mathcal{A}$. Рассмотрим подпространство $V_{\alpha_1}$ собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$, отвечающих собственному значению $\alpha_1$. Тогда $V = V_{\alpha_1} \oplus V_{\alpha_1}^{\perp}$. Пусть $x \in V_{\alpha_1}$ Тогда $\mathcal{A}^{-1}x \in V_{\alpha_1}$. Поэтому для $y \in V_{\alpha_1}^{\perp}$ получаем

$$(x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^* x, y) = (\mathcal{A}^{-1}x, y) = 0.$$

Следовательно, $V_{\alpha_1}^{\perp}$ — инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Ограничение линейного преобразования $\mathcal{A} - \alpha_1 \mathcal{E}$ на подпространство $V_{\alpha_1}^{\perp}$ является невырожденным линейным преобразованием. Отсюда получаем, что преобразования $\mathcal{A}|_{V_{\alpha_1}^{\perp}}$ имеет собственные значения $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Поскольку $\dim V_{\alpha_1}^{\perp} < \dim V$, то индукцией по размерности $V$ получаем, что $V_{\alpha_1}^{\perp} = V_{\alpha_2} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_p}$ — ортогональная сумма. Следовательно, $V = V_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_p}$ — ортогональная сумма.

Заметим, что в каждом из $V_{\alpha_i}$ матрица преобразования $\mathcal{A}|_{V_{\alpha_i}}$ имеет диагональный вид с элементами $\alpha_i$ по диагонали. Объединяя ортонормированные базисы пространств $V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_p}$ получим ортонормированный базис пространства $V$, состоящий из собственных векторов, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет искомый вид.

Теперь мы изучим канонический вид ортогонального преобразования. Как уже отмечалось

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \text{ — ортогональная матрица.}$$

Канонический вид ортогонального преобразования описывает

**Теорема 3.** *Для любого ортогонального преобразования $\mathcal{A}$ конечномерного евклидова пространства $V$ существует ортонормированный базис пространства $V$, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет клеточно-диагональный вид*

$$\begin{pmatrix} -E_{k_1} & & & & \\ & E_{k_2} & & & \\ & & A_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_m \end{pmatrix},$$

*где $E_{k_i}$ — единичная матрица порядка $k_i$, и матрица*

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix}, \text{ где } \phi_i \neq \pi k.$$

Сначала докажем, что справедлива следующая

**Лемма 3.** *Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — ортогональное преобразование конечномерного евклидова пространства. Предположим, что многочлен $t^2 - \beta t + \gamma$ не имеет вещественных корней и $\mathcal{A}^2 - \beta\mathcal{A} + \gamma\mathcal{E} = 0$. Тогда $\gamma = 1$, $\dim V = 2n$, $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 - \beta t + 1)^n$ и в $V$ существует ортонормированный базис $f_1, g_1, \ldots, f_n, g_n$, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет клеточно-диагональный вид*

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \phi \neq \pi k$$

*где $\cos\phi + i\sin\phi$ — корень многочлена $t^2 - \beta t + 1$.*

Доказательство. Выберем в $V$ вектор $x$ единичной длины. Тогда $\mathcal{A}x$ — вектор единичной длины. Заметим, что векторы $x$ и $\mathcal{A}x$ линейно независимы. Действительно, если $\mathcal{A}x = \lambda x$, то

$$(\mathcal{A}^2 - \beta\mathcal{A} + \gamma\mathcal{E})x = \mathcal{A}^2x - \beta\mathcal{A}x + \gamma\mathcal{E}x = (\lambda^2 - \beta\lambda + \gamma)x.$$

Отсюда получаем, что $\lambda$ — вещественный корень многочлена $t^2 - \beta t + \gamma$. Противоречие с условием леммы.

Пусть $U = Lin(x, \mathcal{A}x)$. Как легко видеть, подпространство $U$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_U$ — ограничение преобразования $\mathcal{A}$ на подпространство $U$. Тогда

$$\mathcal{B}x = \mathcal{A}x,$$

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^2x = \beta\mathcal{A}x - \gamma x.$$

Поэтому $B = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ — матрица преобразования $\mathcal{B}$ в базисе $x, \mathcal{A}x$.Значит $\det(B) = \gamma$. Поскольку $\mathcal{B}$ — ортогональное преобразование, то $\gamma = \pm 1$. Характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{B}}(t) = t^2 - \beta t + \gamma$ не имеет вещественных корней. Поэтому $\gamma = 1$.

Непосредственным вычислением получаем, что $x$ ортогонален вектору $\mathcal{A}x - (x, \mathcal{A}x)x$. Заметим, что

$$(x, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}(\mathcal{A}x)) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}^2x) = (\mathcal{A}x, \beta\mathcal{A}x - \gamma x) = \beta(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) - (\mathcal{A}x, x).$$

Отсюда

$$(x, \mathcal{A}x) = \frac{\beta}{2}.$$

Поэтому

$$\mathcal{A}x - (x, \mathcal{A}x)x = \mathcal{A}x - \frac{\beta}{2}x.$$

Длина

$$||\mathcal{A}x - \frac{\beta}{2}x|| = \sqrt{(\mathcal{A}x - \frac{\beta}{2}x, \mathcal{A}x - \frac{\beta}{2}x)} =$$

$$\sqrt{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) - \beta(\mathcal{A}x, x) + \frac{\beta^2}{4}(x, x)} = \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4}}.$$

Пусть $f_1 = x$, $g_1 = \frac{\mathcal{A}x - \frac{\beta}{2}x}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4}}}$. Тогда $f_1, g_1$ — ортонормированный базис подпространства $U$ и $\mathcal{A}x = \frac{\beta}{2}f_1 + \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4}}g_1$. Отсюда получаем, что

$$\mathcal{A}f_1 = \mathcal{A}x = \frac{\beta}{2}x + (\mathcal{A}x - \frac{\beta}{2}x) = \frac{\beta}{2}f_1 + \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4}}g_1,$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}x - \frac{\beta}{2}x) = \mathcal{A}^2x - \frac{\beta}{2}\mathcal{A}x = \beta\mathcal{A}x - x - \frac{\beta}{2}\mathcal{A}x =$$

$$\frac{\beta}{2}\mathcal{A}x - x = \frac{\beta}{2}(\frac{\beta}{2}f_1 + \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4}}g_1) - f_1 = -(1 - \frac{\beta^2}{4})f_1 + \frac{\beta}{2}\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4}}g_1.$$

Поэтому

$$\mathcal{B}f_1 = \mathcal{A}f_1 = \frac{\beta}{2}f_1 + \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4}}g_1,$$

$$\mathcal{B}g_1 = \mathcal{A}g_1 = -\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4}}f_1 + \frac{\beta}{2}g_1.$$

Следовательно, матрица $B$ преобразования $\mathcal{B}$ в базисе $f_1, g_1$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta}{2} & -\sqrt{1-\frac{\beta^2}{4}} \\ \sqrt{1-\frac{\beta^2}{4}} & \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\cos\phi + i\sin\phi$ — корень многочлена $t^2 - \beta t + 1$. Тогда $\beta = 2\cos\phi$ и

$$B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\phi \neq \pi k$.

Поскольку подпространство $U$ — инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}$ — изоморфизм, то $U$ — инвариантно относительно $\mathcal{A}^{-1}$. Поэтому $U$ — инвариантно относительно $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$. В силу леммы 4.2, ортогональное дополнение $U^\perp$ — также инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Поскольку $\dim U^\perp < \dim V$, то, применяя несложную индукцию по размерности пространства, можно считать, что $\dim U^\perp = 2(n-1)$ и $(t^2-\beta+1)^{n-1}$ — характеристический многочлен ограничения преобразования $\mathcal{A}$ на $U^\perp$. Как было показано, матрица преобразования $\mathcal{A}|_U$ в базисе $f_1, g_1$ имеет вид $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$. Поэтому $t^2-\beta t+1$ — характеристический многочлен преобразования $\mathcal{A}|_U$. Так как $V = U \oplus U^\perp$, то $\dim V = 2n$, и по лемме 3.2 получаем $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2-\beta t+1)^n$. Применяя аналогичные рассуждения для пространства $U^\perp$, можно выбрать ортонормированный базис $f_2, g_2, \ldots, f_n, g_n$ пространства $U^\perp$, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}|_{U^\perp}$ имеет указанный в лемме вид. Тогда $f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots, f_n, g_n$— искомый базис евклидова пространства $V$.

**Лемма 4.** *Пусть $\mathcal{A}$ — ортогональное преобразование конечномерного евклидова пространства $V$, $\gamma$ — собственное значение линейного преобразования $\frac{\mathcal{A}+\mathcal{A}^*}{2}$ и $V_\gamma$ — пространство собственных векторов, овтечающих $\gamma$. Тогда либо $\gamma = \pm 1$ и $V_\gamma = \ker(\mathcal{A} \pm \mathcal{E})$, либо $\gamma \neq \pm 1$, многочен $t^2-2\gamma t+1$ не имеет вещественных корней и $V_\gamma = \ker(\mathcal{A}^2-2\gamma\mathcal{A}+\mathcal{E})$.*

Доказательство. Пусть $\gamma$ — собственное значение $\frac{\mathcal{A}+\mathcal{A}^*}{2}$. Тогда $(\mathcal{A}+\mathcal{A}^*)x = 2\gamma x$ для некоторого ненулевого вектора $x$. Поскольку $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$, то

$$(\mathcal{A}+\mathcal{A}^{-1})x = (\mathcal{A}+\mathcal{A}^*)x = 2\gamma x.$$

Применяя к обоим частям этого равенства преобразование $\mathcal{A}$ получаем, что

$$(\mathcal{A}^2 - 2\gamma\mathcal{A} + \mathcal{E})x = 0.$$

Отсюда следует, что $V_\gamma \subseteq \ker(\mathcal{A}^2 - 2\gamma\mathcal{A} + \mathcal{E})$.

Пусть $\gamma = 1$. Тогда $(\mathcal{A}-\mathcal{E})^2 x = 0$. Применяя к обоим частям этого равенства преобразование $\mathcal{A}^*$ получаем, что

$$(\mathcal{A}^* - \mathcal{E})(\mathcal{A} - \mathcal{E})x = 0.$$

Поэтому

$$((\mathcal{A}-\mathcal{E})x, (\mathcal{A}-\mathcal{E})x) = ((\mathcal{A}-\mathcal{E})^*(\mathcal{A}-\mathcal{E})x, x) = ((\mathcal{A}^*-\mathcal{E})(\mathcal{A}-\mathcal{E})x, x) = 0.$$

Следовательно, $(\mathcal{A}-\mathcal{E})x = 0$, т.е. $x \in \ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})$. Таким образом, $V_1 \subseteq \ker(\mathcal{A}+\mathcal{E})$. Анологично получаем, что $V_{-1} \subseteq \ker(\mathcal{A}+\mathcal{E})$.

Пусть $x \in \ker(\mathcal{A} \pm \mathcal{E})$. Тогда $\mathcal{A}x = \pm x$ и $\mathcal{A}^{-1}x = \pm x$. Поэтому

$$\frac{(\mathcal{A}+\mathcal{A}^*)}{2}x = \frac{1}{2}(\mathcal{A}+\mathcal{A}^{-1})x = \frac{1}{2}(\mathcal{A}x + \mathcal{A}^{-1}x) = \pm x.$$

Следовательно, $\ker(\mathcal{A} \pm \mathcal{E}) \subseteq V_{\pm 1}$. В силу предыдущего получаем, что $\ker(\mathcal{A} \pm \mathcal{E}) = V_{\pm 1}$.

Пусть $\gamma \neq \pm 1$. Предположим, что $t^2 - 2\gamma t + 1$ имеет вещественные корни $\lambda_1, \lambda_2$. Тогда $(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})x = 0$. Поэтому, либо $\ker(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \neq 0$, либо $\ker(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E}) \neq 0$. Следовательно, либо $\lambda_1$, либо $\lambda_2$ — собственное значение $\mathcal{A}$. Если $\lambda_1$ — собственное значение $\mathcal{A}$, то $\lambda_1 = \pm 1$. Так $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — корни многочлена $t^2 - 2\gamma t + 1$, то $\lambda_2 = \lambda_1^{-1} = \lambda_1$ и $\gamma = \lambda_1 = \pm 1$. Противоречие с тем, что $\gamma \neq \pm 1$. Случай для $\lambda_2$ разбирается аналогично. Поэтому $t^2 - 2\gamma t + 1$ не имеет вещественных корней.

Пусть $x \in \ker(A^2 - 2\gamma \mathcal{A} + \mathcal{E})$. Тогда

$$(\mathcal{A} + \mathcal{A}^* - 2\gamma \mathcal{E})x = (\mathcal{A} + \mathcal{A}^{-1} - 2\gamma \mathcal{E})x = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}^2 - 2\gamma \mathcal{A} + \mathcal{E})x = 0.$$

Поэтому $(\mathcal{A}+\mathcal{A}^*)x = 2\gamma x$. Следовательно, $\gamma$ — собственное значение $\frac{\mathcal{A}+\mathcal{A}^*}{2}$ и $x \in V_\gamma$. Отсюда получаем, что $V_\gamma = \ker(A^2 - 2\gamma \mathcal{A} + \mathcal{E})$.

Доказательство ( Теорема 3). Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — собственные значения линейного преобразования $\frac{\mathcal{A}+\mathcal{A}^*}{2}$, отличные от $\pm 1$. Тогда, в силу теоремы 5.1 и леммы 4,

$$V = \ker(\mathcal{A} - \mathcal{E}) \oplus \ker(\mathcal{A} + \mathcal{E}) \oplus \ker(\mathcal{A}^2 - 2\gamma_1 \mathcal{A} + \mathcal{E})\mathcal{A} \oplus \ldots \oplus \ker(\mathcal{A}^2 - 2\gamma_n \mathcal{A} + \mathcal{E}).$$

Рассмотрим пространство $\ker(\mathcal{A} + \mathcal{E})$. Тогда, в любом ортонормированном базисе $e_{11}, \ldots, e_{1k_1}$ пространство $\ker(\mathcal{A}+\mathcal{E})$, матрица ограничение преобразования $\mathcal{A}$ равна $-E_{k_1}$. Аналогично, в любом ортонормированном базисе $e_{21}, \ldots, e_{2k_2}$ подпространства $ker(\mathcal{A}-\mathcal{E})$, матрица преобразования $\mathcal{A}$ равна $E_{k_2}$.

Рассмотрим пространство $U = \ker(\mathcal{A}^2 - 2\gamma_i \mathcal{A} + 1)$ и $\mathcal{B}$ — ограничение преобразования $\mathcal{A}$ на $U$. Тогда, по лемме 3, в $U$ существует ортонормированный базис $f_{i1}, g_{i1}, \ldots, f_{ir_i}, g_{ir_i}$, в котором матрица преобразования $\mathcal{B}$ имеет клеточно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \phi_i \neq \pi l.$$

Образуем базис

$$e_{11}, \ldots, e_{1r_1}, e_{21}, \ldots, e_{2r_2}, f_{11}, g_{11}, f_{12}, g_{12}, \ldots, f_{1n_1}, g_{1n_1}, f_{21}, g_{21}, f_{22}, g_{22}, \ldots$$

пространства $V$. В этом базисе матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет искомый вид.

Дадим геометрическую интерпретацию ортогонального преобразования $\mathcal{A}$ трехмерного евклидова пространства.

Пусть $e_1, e_2, e_3$ — ортонормированный базис, в котором матрица $A$ преобразования $\mathcal{A}$ имеет канонический вид. Если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix},$$

то преобразование $\mathcal{A}$ оставляет неподвижными векторы подпространства (на прямой) $\mathrm{Lin}(e_1)$. В тоже самое время $\mathcal{A}$ осуществляет поворот на угол $\phi$ в подпространстве (в плоскости) $\mathrm{Lin}(e_2, e_3)$ вокруг оси $l = \mathrm{Lin}(e_1)$.

Если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Тогда преобразование $\mathcal{A}$ осуществляет поворот на угол $\phi$ в подпространстве (в плоскости) $\mathrm{Lin}(e_2, e_2)$ вокруг оси $l$, а затем производит зеркальное отражение векторов лежащих на прямой $l$ относительно плоскости $\mathrm{Lin}(e_2, e_3)$.

Пусть $V$ — конечномерное евклидово пространство и $L$ — его подпространство. Тогда $V = L + L^{\perp}$ и для вектора $x \in V$ имеет место разложение $x = y + z$, где $y \in L$, $z \in L^{\perp}$. Линейное преобразование $\mathcal{A} : V \mapsto V$, заданное правилом $\mathcal{A}(x) = y - z$, называется *зеркальным отражением* относительно подпространства $L$.

Пример 1. Найти канонический вид ортогонального преобразования, заданного матрицей

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сначала найдем собственные значения матрицы

$$B = \frac{A + A^*}{2} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\chi_B(t) = -\frac{1}{216}((4-6t)^3 - 3(4-6t) + 2)$. Корни этого многочлена $t_1 = 1$, $t_{2,3} = \frac{1}{2}$. По теореме 5.1 $V = V_1 \oplus V_{\frac{1}{2}}$. Найдем базисы $V_1$ и $V_{\frac{1}{2}}$. Подпространство $V_1 = \ker(B - E)$. Образуем матрицу $(B - E|E)$. Элементарными преобразованиями строк матрицы получаем, что

$$\left( \begin{array}{c|c} \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{c|c} \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \end{array} \right).$$

Следовательно, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — базис пространства $V_1$. Векторы $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ — базис пространства $V_{\frac{1}{2}}$.

Ортонормированный базис подпространства $V_1$ — вектор $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Положим $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_2$. Процессом Грамма-Шмидта ортогонализуем векторы $f_1, \mathcal{A}f_1$

$$g_1' = \mathcal{A}f_1 - (f_1, \mathcal{A}f_1)f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Положим $g_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} g_1'$. Тогда в ортономированном базисе $e_1, f_1, g_1$ матрица $A$ имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $D = T^{-1}AT$, где $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. Как легко видеть, матрица $T$ образована вектор-столбцами $e_1, f_1, g_1$.

Таким образом, данное ортогональное преобразование оставляет на месте векторы на прямой $l = \mathrm{Lin}(e_1)$ и осуществляет поворот на угол $60^\circ$ в плоскости $\mathrm{Lin}(f_1, g_1)$ вокруг оси $l$. Так как $e_1$ – вектор нормали к плоскости $\mathrm{Lin}(f_1, g_1)$, то уравнение плоскости $x+y+z=0$.

Пример 2. Найти канонический вид ортогональной матрицы

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$B = \frac{A+A^*}{2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\chi_B(t) = t^2(t-1)$. Корни этого многочлена $t_1 = 1$, $t_{2,3} = 0$. Поэтому $V = V_1 \oplus V_0$. Вектор $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — базис пространства $V_1$. Векторы $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — базис пространства $V_0$.

Ортонормированный базис подпространства $V_1$ — вектор $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Положим $f_1 = u_3$. Процессом Грамма-Шмидта ортогонализуем векторы $f_1, \mathcal{A}f_1$

$$g_1' = \mathcal{A}f_1 - (f_1, \mathcal{A}f_1)f_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $||g_1'|| = 1$, то $g_1 = g_1'$. Тогда в ортонормированном базисе $e_1, f_1, g_1$ матрица $A$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 3.7 Нормальные преобразования

Эрмитовы, симметрические, унитарные и ортогональные линейные преобразования являются подклассом более широкого класса преобразований, а именно, нормальных линейных преобразований.

Линейное преобразование $\mathcal{A} : V \mapsto V$ эрмитова (евклидова) пространства называется нормальным, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, т.е. преобразования $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ коммутируют. Если $A$ — матрица нормального преобразования $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе, то в силу теоремы 4.1, $A^*$ — матрица преобразования $\mathcal{A}^*$ в том же базисе. Поэтому $AA^* = A^*A$. Обратно, пусть $A$ — нормальная матрица из $M_n(C)$, т.е. $AA^* = A^*A$. Тогда линейное преобразование $\mathcal{A} : C^n \mapsto C^n$, заданное правилом $\mathcal{A} : x \mapsto Ax$ является нормальным.

**Теорема 1.** *Для любого нормального преобразования $\mathcal{A}$ конечномерного эрмитова пространства $V$ существует ортонормированный базис пространства $V$, состоящий из* *собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$. В этом базисе преобразование $\mathcal{A}$ имеет канонический вид, т.е. его матрица диагональна с собственными значениями по диагонали.*

Доказательство. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ — собственные значения преобразования $\mathcal{A}$ и $V_{\gamma_1}, \ldots, V_{\gamma_p}$ — подпространства собственных векторов отвечающих этим собственным значениям. Тогда $V = V_{\gamma_1} \oplus V_{\gamma_1}^{\perp}$. В силу леммы 3.3 подпространство $V_{\gamma_1}$ инвариантно относительно преобразования $\mathcal{A}^*$. По лемме 4.2 подпространство $V_{\gamma_1}^{\perp}$ инвариантно относительно преобразования $\mathcal{A}$. Поскольку преобразование $(\mathcal{A} - \gamma_1\mathcal{E})|_{V_{\gamma_1}^{\perp}}$ невырождено, то применяя несложную индукцию получаем, что

$$V_{\gamma_1}^{\perp} = V_{\gamma_2}\oplus, \ldots, \oplus V_{\gamma_p}.$$

Поэтому

$$V = V_{\gamma_1}\oplus, \ldots, \oplus V_{\gamma_p}.$$

Обьединяя ортонормированные базисы подпространств $V_{\gamma_1}, \ldots, V_{\gamma_p}$ получим базис пространства $V$, в котором преобразование $\mathcal{A}$ имеет искомый вид.

**Теорема 2.** *Пусть $\mathcal{A}$ — нормальное преобразование конечномерного евклидова пространства $V$. Тогда в пространстве $V$ существует ортонормированный базис, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет клеточно-диагональный вид*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix},$$

*где $A_1$ — диагональная матрица и для $i > 1$ матрица*

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} = r_i \begin{pmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix}, \text{ где } r_i > 0 \text{ и } \phi_i \neq \pi k.$$

Доказательство. Как было показано $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ — симметрическое линейное преобразование. Пусть $V_0 = \ker \mathcal{A}\mathcal{A}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ — ненулевые собственные значения линейного преобразования $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ и $V_{\alpha_i}$ — пространство собственных векторов, отвечающих собственному значению $\alpha_i$. Тогда

$$V = V_0 \oplus V_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_p}$$

и эта сумма является ортогональной.

Покажем, что $\ker \mathcal{A} = V_0$. Ясно, что $\ker \mathcal{A} \subseteq V_0$. Пусть $x \in \ker \mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Тогда

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}x) = (x, \mathcal{A}\mathcal{A}^*x) = 0.$$

Поэтому $\mathcal{A}x = 0$ и $x \in \ker \mathcal{A}$. Следовательно, $\ker \mathcal{A} = \ker \mathcal{A}\mathcal{A}^* = V_0$.

Отсюда получаем, что ограничение $\mathcal{A}$ на подпространство $V_0$, $\mathcal{A}|_{V_0} = 0$. Тогда матрица линейного преобразования $\mathcal{A}|_{V_0}$ в ортонормированном базисе $e_{01}, \ldots, e_{0k_0}$ подпространства $V_0$ равна нулю.

Так $\mathcal{A}$ — нормальное преобразование, то, в силу леммы 3.3, $\mathcal{A}(V_{\alpha_1}) \subseteq V_{\alpha_1}$ и $\mathcal{A}^*(V_{\alpha_1}) \subseteq V_{\alpha_1}$. Для ненулевого вектора $x \in V_{\alpha_1}$ имеет место $\mathcal{A}\mathcal{A}^*x = \alpha_1 x$. Отсюда получаем, что

$$\alpha_1(x, x) = (\mathcal{A}\mathcal{A}^*x, x) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) > 0.$$

Следовательно, $\alpha_1 > 0$. Поскольку $\mathcal{A}$ — невырожденное линейное преобразование на подпространстве $V_{\alpha_1}$, то $\mathcal{A}^*x = \alpha_1\mathcal{A}^{-1}x$ для любого $x \in V_{\alpha_1}$.

Рассмотрим линейное преобразование $\mathcal{B} = \sqrt{\alpha_1^{-1}}\mathcal{A}|_{V_{\alpha_1}}$. Тогда для любого $x \in V_{\alpha_1}$

$$\mathcal{B}^* x = \sqrt{\alpha_1^{-1}}\mathcal{A}^* x = \sqrt{\alpha_1^{-1}}\alpha_1 \mathcal{A}^{-1} x = (\sqrt{\alpha_1^{-1}}\mathcal{A})^{-1} x = \mathcal{B}^{-1} x.$$

Поэтому $\mathcal{B}$ — ортогональное преобразование подпространства $V_{\alpha_1}$. По теореме 6.3 существует ортонормированный базис $e_{11}, \ldots, e_{1k_1}, f_{11}, g_{11}, \ldots, f_{1m_1}, g_{1m_1}$ подпространства $V_{\alpha_1}$, в котором матрица линейного преобразования $\mathcal{B}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -E_{k_{11}} & & & & \\ & E_{k_{12}} & & & \\ & & \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{pmatrix} \cos\phi_{m_1} & -\sin\phi_{m_1} \\ \sin\phi_{m_1} & \cos\phi_{m_1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица линейного преобразования $\mathcal{A}|_{V_{\alpha_1}}$ в базисе $e_{11}, \ldots, e_{1k_1}, f_{11}, g_{11}, \ldots, f_{1m_1}, g_{1m_1}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha_1}E_{k_{11}} & & & & \\ & \sqrt{\alpha_1}E_{k_{12}} & & & \\ & & \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1}\cos\phi_1 & -\sqrt{\alpha_1}\sin\phi_1 \\ \sqrt{\alpha_1}\sin\phi_1 & \sqrt{\alpha_1}\cos\phi_1 \end{pmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1}\cos\phi_{m_1} & -\sqrt{\alpha_1}\sin\phi_{m_1} \\ \sqrt{\alpha_1}\sin\phi_{m_1} & \sqrt{\alpha_1}\cos\phi_{m_1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для каждого собственного значения $\alpha_i$ существует ортонормированный базис $e_{i1}, \ldots, e_{ik_i}, f_{i1}, g_{i1}, \ldots, f_{im_i}, g_{im_i}$ подпространства $V_{\alpha_i}$, в котором матрица линейного преобразования $\mathcal{A}|_{V\alpha_i}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha_i}E_{k_{i1}} & & & & \\ & \sqrt{\alpha_i}E_{k_{i2}} & & & \\ & & \begin{pmatrix} a_{i1} & -b_{i1} \\ b_{i1} & a_{i1} \end{pmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{pmatrix} a_{im_i} & -b_{i1m_i} \\ b_{im_i} & b_{im_i} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Образуем базис

$$e_{01}, \ldots, e_{0k_0}, e_{11}, \ldots, e_{1k_1}, \ldots, e_{l1}, \ldots, e_{lk_l}, f_{11}, g_{11}, \ldots, f_{1m_1}, g_{1m_1}, \ldots, f_{p1}, g_{p1}, \ldots, f_{pm_p}, g_{pm_p}$$

пространства $V$. В этом базисе матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет искомый вид.

Следствие 5.1 говорит о том, что всякая эрмитова (симметрическая) матрица подобна диагональной. Понятие унитарной (ортогональной) матрицы позволяет дать более точное описание матрицы подобия. Справедлива следующая

**Теорема 3.** *Пусть $A$ — эрмитова (симметрическая) матрица порядка $n$. Тогда $A$ подобна диагональной матрице $B$ с помощью унитарной (ортогональной) матрицы $T$. Другими словами, $B = T^{-1}AT = T^*AT$.*

Доказательство. Пусть $A$ — эрмитова матрица порядка $n$. Рассмотрим линейное преобразование $\mathcal{A} : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$, заданное матрицей $A$, т.е. $\mathcal{A}x = Ax$. Тогда по следствию 5.1 существует ортонормированный базис эрмитова пространства $\mathbb{C}^n$, в котором матрица $B$ преобразования $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид. Пусть $T$ — матрица перехода от стандартного базиса к этому новому базису. Тогда $B = T^{-1}AT$, и по следствию 1 $T$ — унитарная матрица.

Случай симметрической матрицы доказывается аналогично.

Для ортогональных матриц справедлива

**Теорема 4.** *Пусть $A$ — ортогональная матрица порядка $n$. Тогда $A$ подобна клеточно-диагональной матрице*

$$B = \begin{pmatrix} -E_{k_1} & & & & \\ & E_{k_2} & & & \\ & & A_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_m \end{pmatrix}$$

*с помощью ортогональной матрицы $T$, т.е. $B = T^{-1}AT = T^{\top}AT$, здесь $E_{k_i}$ — единичная матрица порядка $k_i$, и матрица*

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix}, \text{ где } \phi_i \neq \pi k.$$

И, наконец,

Линейное преобразование $\mathcal{A} : V \mapsto V$ эрмитова (евклидова) пространства называется косоэрмитовым (кососимметрическим), если $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$. Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ называется кососимметрическим, если $A^* = -A$.

Упражнение. *Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto V$ — кососимметрическое преобразование. Доказать, что $(\mathcal{A}x, x) = 0$ для $x \in V$, т.е. $\mathcal{A}x \perp x$.*

Заметим, что собственные значения косоэрмитова (кососимметрического) преобразования $\mathcal{A}$ чисто мнимые. Действительно, пусть $\alpha$ — собственное значение и $x$, отвечающий ему собственный вектор преобразования $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}x = \alpha x$. Поэтому

$$\alpha(x, x) = (\alpha x, x) = (\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}^*x) = -(x, \mathcal{A}x) = -\overline{\alpha}(x, x).$$

Отсюда получаем, что $\overline{\alpha} = -\alpha$, т.е. $\alpha$ — чисто мнимое комплексное число. Следовательно, вещественные собственные значения кососимметрического преобразования равны 0.

Для кососимметрических матриц справедлива

**Теорема 5.** *Пусть $A$ — кососимметрическая матрица порядка $n$. Тогда $A$ подобна клеточно-диагональной матрице*

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix},$$

*где $A_1$ — нулевая матрица и для $i > 1$ матрица*

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix},$$

*с помощью ортогональной матрицы $T$, т.е. $B = T^{-1}AT = T^{\top}AT$.*

Пример. Привести кососимметрическую матрицу $A$ к каноническому виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По условию $A^* = -A$. Тогда $AA^* = -A^2$ и

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен

$$\chi_{A^2}(t) = -\det \begin{pmatrix} -2-t & 1 & 1 \\ 1 & -2-t & 1 \\ 1 & 1 & -2-t \end{pmatrix} = (t+2)^3 - 2 - 3(2+t) = t^3 + 6t^2 + 9t.$$

Числа $t_1 = 0, t_{2,3} = -3$ — корни $\chi_{A^2}(t)$. Поэтому собственные значения матрицы $AA^*$ равны 0 и 3. Следовательно,

$$V = V_0 + V_3.$$

Найдем $V_0$, $V_3$

$$\left( \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right) \sim \left( \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right).$$

Следовательно, $u_1 = (1,1,1)^{\top}$ — базис пространства $V_0$. Векторы $u_2 = (0,-1,1)^{\top}$, $u_3 = (1,1,-2)^{\top}$ — базис пространства $V_3$.

В $V_0$ ортонормированный базис $e = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\top}$.

Рассмотрим $V_3$. Тогда $\alpha = 3$ и $B = \frac{1}{\sqrt{3}}A|_{V_3}$. Пусть $f = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)^{\top}$. Тогда

$$g = Bf = \frac{1}{\sqrt{3}}Af = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}(2,-1,-1)^{\top} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)^{\top}.$$

Матрица $A$ в базисе $e, f, g$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от стандартного базиса к базису $e, f, g$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

## 3.8 Задачи

1. Найти

$$\max_{x\neq 0}\lim_{k\to\infty}\Big(\frac{||A^k x||}{||x||}\Big),\quad \text{где}\quad A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Пусть

$$C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Доказать, что матрица $A=\frac{E-C}{E+C}$ — ортогональная. Найти собственные значения матрицы $A$, не вычисляя матрицу $A$. Найти канонический вид $B$ ортогональной матрицы $A$ и ортогональную матрицу $T$ такую, что $B=T^{-1}AT$.

3. Пусть $V$ — вещественное векторное пространство с базисом $a_1,a_2,a_3$. Для векторов

$$x=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3,\quad y=y_1a_1+y_2a_2+y_3a_3$$

зададим произведение

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+2x_3y_3+x_1y_3+x_3y_1.$$

Доказать, что заданное произведение является скалярным произведением. Пусть линейное преобразование $\mathcal{A}:V\mapsto V$ имеет матрицу $A$ в базисе $a_1,a_2,a_3$. Найти матрицу $B$ сопряженного преобразования $\mathcal{A}^*$ в том же базисе, если

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

4. Найти все векторы $x\in\mathbb{R}$, для которых $||x||>||Ax||>||A^2x||>||A^3x||>\ldots$, а также все векторы $y\in\mathbb{R}$, для которых $||y||>||A^{-1}y||>||A^{-2}y||>||A^{-3}y||>\ldots$, если $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$.

5. Найти ортогональную матрицу $A$ с определителем, равным $-1$, и удовлетворяющую следующим свойствам $Au=v$, $Av=u$, где $u=(2,1,-2)^\top$, $v=(3,0,0)^\top$. Доказать единственность $A$ и дать геометрическое описание оператора $\mathcal{A}:x\mapsto Ax$ пространства $\mathbb{R}^3$.

6. Найти канонический вид ортогональной матрицы

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix},$$

не вычисляя ее характеристического многочлена.

7. При каких значениях комплексного параметра $z$ матрица $\begin{pmatrix}z-3 & 1\\ 2z-4 & 1\end{pmatrix}$ подобна а) унитарной, б) эрмитовой, в) нормальной.

8. Найти все значения предела $\lim_{k\to\infty}\frac{||A^kx||}{||B^kx||}$ в зависимости от ненулевого вектора $x\in\mathbb{R}^2$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & -6\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

# Литература


[1] Винберг Э.Б. *Курс алгебры*, Университетский учебник, «Факториал Пресс», Москва (2002), С. 554.

[2] Кострикин А.И. *Введение в алгебру т. 2 Линейная алгебра*, Физико-математическая литература, Москва (2000), С. 367.

[3] Артамонов В.А. и др., *Сборник задач по алгебре под редакцией А.И. Кострикина*, т. 1, Физико-математическая литература, Москва (2007), С. 274.

[4] Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре*, 9-е издание, Москва, БИНОМ. Лаборатория знаний (2005), С. 383.

[5] Мальцев А.И. *Основы линейной алгебры*, Издательство «Наука» Физико-математическая литература, Москва (1975), С. 398.

[6] Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. *Линейная алгебра и геометрия* , Физматлит, Москва (2009), С. 511.

[7] Чуркин В.А. *Жорданова классификация конечномерных линейных операторов*: Методические указания к новому методу построения жордановой базы для линейного оператора. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1991.

[8] Дементьева Н.В., Лисейкин В.Д.,Чуркин В.А.*Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной матрицы решений однородной системы уравнений с использованием корневого базиса:* Учебное пособие, Изд-во НГУ, Новосибирск (2008), С. 49.