

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)**

УТВЕРЖДАЮ

\_\_\_\_\_

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Рабочая программа дисциплины  
**«Методы Монте-Карло»**

Направления подготовки  
**010400 – Прикладная математика и информатика**  
**010100 – Математика**

Квалификация (степень) выпускника  
**Бакалавр**

Форма обучения  
**Очная**

Новосибирск 2014

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Аннотация рабочей программы.....	3
1. Цели освоения дисциплины (курса) « <i>Методы Монте-Карло</i> ».....	4
2. Место дисциплины « <i>Методы Монте-Карло</i> » в структуре ООП по направлению 010400 – «Прикладная математика и информатика» (квалификация «бакалавр») и ООП по направлению 010100 – «Математика» (квалификация «бакалавр»).....	5
3. Компетенции обучающегося, формируемые и развиваемые в результате освоения дисциплины « <i>Методы Монте-Карло</i> ».....	5
4. Структура и содержание дисциплины « <i>Методы Монте-Карло</i> ».....	7
А). Структура курса.....	7
Б). Содержание лекций.....	9
В). Содержание практических занятий, включающих реферативные доклады студентов.....	9
Г). Содержание семестрового домашнего задания.....	11
Д). Другие разделы курса.....	11
5. Образовательные технологии дисциплины « <i>Методы Монте-Карло</i> ».....	12
6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины « <i>Методы Монте-Карло</i> ».....	12
А). Семестровое домашнее задание.....	12
Б). Организация экзамена.....	14
В). Примеры экзаменационных задач.....	14
Г). Дополнительные контрольные вопросы на экзамене.....	15
7. Учебно-методическое обеспечение дисциплины « <i>Методы Монте-Карло</i> ».....	16
А). Основная литература.....	16
Б). Дополнительная литература.....	17
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины « <i>Методы Монте-Карло</i> ».....	17

## Аннотация рабочей программы

Программа курса (дисциплины) «*Методы Монте-Карло*» составлена в соответствии с требованиями федеральных государственных образовательных стандартов к обязательному уровню содержания и уровню подготовки раздела *Б.2-В «Профессиональный цикл. Вариативная часть»* основной образовательной программы (ООП) по направлению *010400 – «Прикладная математика и информатика» (квалификация «бакалавр»)* (код дисциплины *Б.3-В-4*), а также раздела *Б.2-В «Профессиональный цикл. Вариативная часть»* ООП по направлению *010100 – «Математика» (квалификация «бакалавр»)*. Дисциплина реализуется на механико-математическом факультете Новосибирского государственного университета кафедрой вычислительной математики.

Курс отражает основы теории и приложений *методов численного статистического моделирования* (или *методов Монте-Карло*). Исторически интенсивное развитие этой теории было связано с решением актуальных задач теории переноса излучения в 50-х гг. XX столетия (в основном в рамках атомных проектов СССР и США). За последние полвека сфера применимости методов численного статистического моделирования значительно расширилась. Разработана теория вероятностных представлений решений задач математической физики, на основе которой построены соответствующие численные стохастические оценки. Эффективные алгоритмы разработаны также в статистической физике (метод Метрополиса, схема Изинга), в физической и химической кинетике (многочастичные задачи, решение уравнений Больцмана и Смолуховского, моделирование реакций и фазовых переходов), в теории массового обслуживания, в финансовой математике, в теории турбулентности, в математической биологии и др. Следует также особо отметить, что алгоритмы метода Монте-Карло допускают относительно несложное и весьма эффективное распараллеливание для осуществления содержательных вычислений на современных суперкомпьютерах.

Курс состоит из *четырех* частей. В первой (самой объемной) части рассматриваются вопросы реализации выборочных значений случайных элементов (случайных величин, векторов и функций) на ЭВМ. Соответствующие вычислительные конструкции являются основой для построения алгоритмов метода Монте-Карло. В качестве первого (по сути – модельного) примера такого алгоритма во второй части курса рассмотрен метод Монте-Карло для вычисления многократных интегралов. На основе этого примера введены основные понятия и соотношения теории численного статистического моделирования (погрешность, затраты, трудоемкость и др.). В третьей части курса рассмотрены более «серьезные» (с практической точки зрения) алгоритмы решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В четвертой части курса рассмотрено содержательное приложение, связанное с решением задач переноса частиц (излучения).

Дисциплина нацелена на формирование общекультурных *компетенций* ОК-9, ОК-10, ОК-14, ОК-16 и профессиональных компетенций ПК-1-3, ПК-5-7, ПК-9, ПК-12 направления обучения *010400 – «Прикладная математика и информатика» (квалификация «бакалавр»)*; а также общекультурных компетенций ОК-6-8, ОК-10, ОК-11, ОК-13-15 и профессиональных компетенций ПК-1-27 направления обучения *010100 – «Математика» (квалификация «бакалавр»)*.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие *формы организации учебного процесса*: лекции, практические занятия, консультации и самостоятельная работа студента. Программой дисциплины предусмотрены следующие *виды контроля*: подготовка студенческих реферативных докладов на практических занятиях, семестровое домашнее задание и коллоквиум; рубежный контроль – в форме экзамена.

*Общая трудоемкость дисциплины* составляет 4 зачетных единицы, 144 академических часа (из них 80 аудиторных – включая коллоквиум и экзамен). Программой дисциплины предусмотрены 36 часов для лекций, 18 часов для практических занятий, 12 часов для

консультаций, а также 64 часа самостоятельной работы студента (включая подготовку докладов на практических занятиях и выполнение семестрового домашнего задания). Остальное время (14 часов) – для контроля в форме коллоквиума (4 часа) и экзамена (10 часов).

Авторами курса являются: *Михайлов Геннадий Алексеевич*, доктор физико-математических наук, член-корреспондент Российской Академии наук, специальность 01.01.07 – вычислительная математика и *Войтишек Антон Вацлавович*, доктор физико-математических наук, профессор, специальность 01.01.07 – вычислительная математика.

## 1. Цели освоения дисциплины (курса) «Методы Монте-Карло»

Дисциплина (курс) «Методы Монте-Карло» имеет своей целью освоение студентами современных тенденций развития теории алгоритмов численного статистического моделирования, которые находят широкое применение при решении задач математической физики и индустриальной математики, а также при численном моделировании случайных процессов и полей в метеорологии, экологии, биологии, физхимии и др. на основе использования многопроцессорных ЭВМ.

Как известно, наиболее эффективные приложения метода Монте-Карло связаны с вычислением *многократных интегралов  $I$  и линейных функционалов  $I_n$*  от решений *интегральных уравнений Фредгольма второго рода*, к которым сводятся многие актуальные прикладные задачи. Эти величины переписываются в виде математических ожиданий  $I = E\zeta$ , причем выборочные значения  $\zeta_i$  случайной величины (*оценки*)  $\zeta$  достаточно эффективно реализуются на ЭВМ. Приближение функционалов строится на основе *закона больших чисел*  $I \approx Z_n = (\zeta_1 + \dots + \zeta_n)/n$ . В свою очередь, на основании *центральной предельной теоремы* несложно показать, что погрешность  $\delta = |I - Z_n|$  с вероятностью, близкой у единице, имеет вид  $H \times \sqrt{D\zeta} / \sqrt{n}$ ,  $H = const$ . Для сформулированных выше задач оценки  $\zeta$  имеют вид  $\zeta = q(\xi)$ , где  $q(\cdot)$  - функция многих переменных, а  $\xi$  - многомерная случайная величина размерности  $d \gg 1$  (вплоть до  $d = \infty$ ) с заданной плотностью распределения  $f(x)$ . При выборе этой плотности следует уменьшать величину *трудоемкости*  $S = D\zeta \times t$  (где  $t$  - среднее время получения одного выборочного значения  $\zeta_i$  на ЭВМ), которая пропорциональна прямым затратам метода Монте-Карло  $s = n \times t$  при заданном уровне погрешности  $\delta$ . Имеется ряд приемов, позволяющих уменьшать дисперсию  $D\zeta$ , основным из которых является *принцип выборки по важности*. При уменьшении величины  $t$  используются стандартные или специальные алгоритмы численной реализации выборочных значений  $\zeta_i$  случайных величин  $\xi$  согласно заданной плотности  $f(x)$ . В этих алгоритмах используется то обстоятельство, что на ЭВМ имеется надежный *генератор (датчик) стандартных случайных чисел  $\alpha_j$*  (т.е. выборочных значений случайной величины  $\alpha$ , равномерно распределенной в интервале (0,1)). Преобразования чисел  $\{\alpha_j\}$  позволяют получать выборочные значения  $\zeta_i$ .

*Целью первого раздела* дисциплины «Методы Монте-Карло» является подробное изучение стандартных и специальных алгоритмов численного моделирования случайных элементов (случайных величин, векторов и функций). *Целью второго раздела* является ознакомление слушателей с приведенными выше основными положениями теории численного статистического моделирования на «классическом» (по сути – методическом) примере вычисления многократного интеграла. *Целью третьего раздела* является подробный разбор алгоритмов решения интегрального уравнения Фредгольма второго

рода, основанных на реализации траекторий однородных цепей Маркова, обрывающихся с вероятностью единица. **Целью четвертого раздела** данного курса является ознакомление слушателей с важным приложением алгоритмов метода Монте-Карло, связанным с решением актуальных задач переноса частиц (излучения).

Значительное внимание в данном курсе будет уделено самостоятельной работе студентов (изучение литературы, подготовка реферативных докладов на практических занятиях, выполнение семестрового домашнего задания и др.).

## **2. Место дисциплины «Методы Монте-Карло» в структуре ООП по направлению 010400 – «Прикладная математика и информатика» (квалификация «бакалавр») и ООП по направлению 010100 – «Математика» (квалификация «бакалавр»)**

Дисциплина «Методы Монте-Карло» входит в разделы, имеющие одинаковое название – «Профессиональный цикл. Вариативная часть» – ООП по направлению 010400 – «Прикладная математика и информатика» (квалификация «бакалавр») и ООП по направлению 010100 – «Математика» (квалификация «бакалавр»). Курс входит в предпоследний (седьмой) семестр упомянутых ООП.

Дисциплина «Методы Монте-Карло» опирается на следующие курсы (и их разделы):

- Математический анализ (в частности, теория интегрирования),
- Теория вероятностей (распределения и основные характеристики случайных величин, закон больших чисел, центральная предельная теорема, теория цепей Маркова и др.),
- Математическая статистика (оценка характеристик случайных величин, доверительные интервалы и др.),
- Функциональный анализ (в частности, теория интегральных уравнений Фредгольма второго рода),
- Методы вычислений (в частности, теория численного интегрирования),
- Математическое моделирование (в частности, моделирование движения частиц различной природы),
- Уравнения математической физики (в частности, теория уравнения переноса),
- Теория функций комплексного переменного (в частности, теория преобразования Фурье).

В свою очередь, материалы дисциплины «Методы Монте-Карло» используются в целом ряде специальных и магистерских курсов кафедры вычислительной математики, кафедры математического моделирования, кафедры математической геофизики, кафедры теории вероятностей и математической статистики ММФ НГУ.

## **3. Компетенции обучающегося, формируемые и развиваемые в результате освоения дисциплины «Методы Монте-Карло»**

**Общекультурные компетенции по направлению подготовки 010400 – «Прикладная математика и информатика» (квалификация «бакалавр»):**

- способность осознать социальную значимость своей будущей профессии, обладать высокой мотивацией к выполнению профессиональной деятельности (ОК- 9);
- способность и готовность к письменной и устной коммуникации на родном языке (ОК-10);
- способность использовать в научной и познавательной деятельности, а также в социальной сфере профессиональные навыки работы с информационными и компьютерными технологиями (ОК-14);
- способность к интеллектуальному, культурному, нравственному, физическому и профессиональному саморазвитию, стремление к повышению своей квалификации и мастерства (ОК-16).

**Профессиональные компетенции по направлению подготовки 010400 – «Прикладная математика и информатика» (квалификация «бакалавр»):**

- способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой (ПК-1);
- способность приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии (ПК-2);
- способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат (ПК-3);
- способность критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности (ПК-5);
- способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников (ПК-6);
- способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным, профессиональным, социальным и этическим проблемам (ПК-7);
- способность решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне, включая: разработку алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программирования (ПК-9);
- способность составлять и контролировать план выполняемой работы, планировать необходимые для выполнения работы ресурсы, оценивать результаты собственной работы (ПК-12).

**Общекультурные компетенции по направлению подготовки 010100 – «Математика» (квалификация «бакалавр»):**

- способность применять знания на практике (ОК-6);
- исследовательские навыки (ОК-7);
- способность приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии (ОК-8);
- умение находить, анализировать и контекстно обрабатывать научно-техническую информацию (ОК-10);
- фундаментальная подготовка по основам профессиональных знаний и готовность к использованию их в профессиональной деятельности (ОК-11);
- базовые знания в области информатики и современных информационных технологий, навыки использования программных средств и навыки работы в компьютерных сетях, умение создавать базы данных и использовать ресурсы Интернет (ОК-13);
- способность к анализу и синтезу (ОК-14);
- способность к письменной и устной коммуникации на русском языке (ОК-15).

**Профессиональные компетенции по направлению подготовки 010100 – «Математика» (квалификация «бакалавр»):**

- определение общих форм, закономерностей и инструментальных средств отдельной предметной области (ПК-1);
- умение понять поставленную задачу (ПК-2);
- умение формулировать результат (ПК-3);
- умение строго доказать утверждение (ПК-4);
- умение на основе анализа увидеть и корректно сформулировать результат (ПК-5);
- умение самостоятельно увидеть следствия сформулированного результата (ПК-6);
- умение грамотно пользоваться языком предметной области (ПК-7);
- умение ориентироваться в постановках задач (ПК-8);
- знание корректных постановок классических задач (ПК-9);
- понимание корректности постановок задач (ПК-10);

- самостоятельное построение алгоритма и его анализ (ПК-11);
- понимание того, что фундаментальное знание является основой компьютерных наук (ПК-12);
- глубокое понимание сути точности фундаментального знания (ПК-13);
- контекстная обработка информации (ПК-14);
- способность передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления (ПК-15);
- выделение главных смысловых аспектов в доказательствах (ПК-16);
- умение извлекать полезную научно-техническую информацию из электронных библиотек, реферативных журналов, сети Интернет (ПК-17);
- умение публично представлять собственные и известные научные результаты (ПК-18);
- владение методом алгоритмического моделирования при анализе постановок математических задач (ПК-19);
- владение методами математического и алгоритмического моделирования при решении прикладных задач (ПК-20);
- владение методами математического и алгоритмического моделирования при анализе теоретических проблем и задач (ПК-21);
- владение проблемно-задачной формой представления математических знаний (ПК-22);
- владение проблемно-задачной формой представления естественнонаучных знаний (ПК-23);
- владение методами математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере (ПК-24);
- умение самостоятельно математически корректно ставить естественнонаучные и инженерно-физические задачи (ПК-25);
- обретение опыта самостоятельного различения типов знания (ПК-26);
- умение точно представлять математические знания в устной форме (ПК-27).

**В результате освоения дисциплины обучающийся должен:**

- **знать** основы теории и приложений весовых методов Монте-Карло и современные направления их развития;
- **уметь** реализовывать алгоритмы метода Монте-Карло и анализировать их с точки зрения эффективности и возможностей применения для решения актуальных прикладных задач;
- **владеть** основными методами моделирования случайных величин и технологиями создания моделируемых вероятностных плотностей.

#### **4. Структура и содержание дисциплины «Методы Монте-Карло»**

Согласно примерному учебному плану ООП по направлению 010400 – «Прикладная математика и информатика» (квалификация «бакалавр») и ООП по направлению 010100 – «Математика» (квалификация «бакалавр»), общая трудоемкость дисциплины составляет **4 (четыре) зачетных единицы (или 144 учебных часа)**.

**А). Структура курса** отражена в следующей таблице (см. ниже).

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)								Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)	
				Лекции	Практические занятия	Подготовка лекц. материала	Семестровое домашнее задание	Коллоквиум	Консультации	Самостоят. Работа	Экзамен		
	<b>Часть 1. Моделирование случайных величин и функций</b>												
1.1	Моделирование дискретных случайных величин, трудоемкость. Равномерно распределенные случайные номера и пары номеров	7	1	1							1		
1.2	Стандартный метод моделирования непрерывных случайных величин	7	1	1	2	4					1		
1.3	Моделирование обобщенного экспоненциального распределения («метод максимального сечения»)	7	2	1							1		
1.4	Моделирование случайных векторов	7	2	1							1		
1.5	Метод рандомизации моделирования (суперпозиция)	7	3	2	2		2				2		
1.6	Метод исключения («отбора»)	7	4	2							2		
1.7	Моделирование нормального распределения	7	5	1							1		
1.8	Изотропное направление	7	5	1	2		2				1		
1.9	Моделирование гамма-распределения	7	6	2							2		
1.10	Моделирование гауссовского случайного вектора	7	7	2	2		2				2		
1.11	Рандомизированная спектральная модель гауссовской случайной функции	7	8	2							2		
1.12	Моделирование диффузионного процесса	7	9	2	2	4	2		4	2			
	<b>Часть 2. Оценка интегралов методом Монте-Карло</b>												
2.1	Несмещенная оценка, приближенный доверительный интервал	7	10	2							2		
2.2	«Выборка по важности»	7	11	1							1		
2.3	Приближенная «выборка по важности». Минимум дисперсии целочисленной случайной величины	7	11	1	2		4				1		
2.4	Критерий качества оценки. Метод условных математических ожиданий	7	12	1							1		
2.5	Метод расщепления	7	12	1				4	2	1			<b>Коллоквиум</b>
	<b>Часть 3. Решение интегральных уравнений</b>												
3.1	Несмещенность «оценки по столкновениям»	7	13	2	2		4				2		
3.2	Дисперсия оценки по столкновениям	7	14	1							1		
3.3	Локальные оценки	7	14	1							1		
3.4	Прямое моделирование, критерий конечности среднего числа переходов в обрывающейся цепи Маркова	7	15	1							1		
3.5	Простейшая модификация прямого моделирования, уменьшающая дисперсию	7	15	1	2		4		2	1			



№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)								Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Подготовка доклада	Семестровое домашнее задание	Коллоквиум	Консультации	Самостоят. Работа	Экзамен	
	<b>Часть 4. Решение задач теории переноса частиц</b>											
4.1	Процесс переноса частиц, стандартная схема моделирования (пример алгоритма)	7	16	1						1		
4.2	Моделирование длины свободного пробега. Метод «максимального сечения»	7	16	1						1		
4.3	Интегральное уравнение переноса с изотропным рассеянием. Весовая модификация процесса переноса	7	17	2	2					2		
4.4	Метод двойной рандомизации	7	18	2					4	2		
											10	<b>Экзамен</b>
	<b>ИТОГО – 144 уч.часа:</b>			<b>36</b>	<b>18</b>	<b>8</b>	<b>20</b>	<b>4</b>	<b>12</b>	<b>36</b>	<b>10</b>	

**Б). Содержание лекций** (36 учебных часов) отражено в ячейках «Раздел дисциплины» приведенной выше таблицы.

**В). Содержание практических занятий** (18 учебных часов), **включающих реферативные доклады студентов** (на подготовку докладов предусмотрено 8 учебных часов)

В этом подразделе представлено содержание девяти практических занятий курса. Особенностью предлагаемого плана является то, что часть материала (характерные примеры, задачи) представляется в докладах студентов (соответственно, преподаватель распределяет доклады при объявлении задания на следующий семинар). Удачные доклады учитываются при подведении итогов семестра (например, баллом «четыре», добавляемом к сумме баллов семестрового домашнего задания (СДЗ) – см. далее раздел 6 данной программы).

### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

1. Организация занятий и предполагаемое подведение итогов семестра: система докладов на семинарских занятиях, сообщение о домашнем задании (более подробная формулировка - на семинарском занятии 3), обзор литературы (основное пособие [2], учебник [1] плюс сопутствующие учебники и пособия – см. далее раздел 7 данной программы).

2. Некоторые сведения из лекционного курса: вычисление математического ожидания методом Монте-Карло, основные приложения метода (вычисление интеграла, решение интегральных уравнений), общая схема численного моделирования случайных векторов.

**ЗАДАНИЕ:** Читать п.п. 1-5, 14 пособия [2].

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

1. Некоторые сведения из лекционного курса: основные приложения метода Монте-Карло. Простейшая модель переноса излучения.
2. Генераторы случайных и псевдослучайных чисел (краткий обзор).
3. Моделирование дискретных случайных величин (стандартный метод, среднее число вычитаний вероятностей, модификации стандартного алгоритма, равномерное дискретное распределение).

ЗАДАНИЕ: Читать п.п. 6-13 [2].

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

1. Метод обратной функции распределения: непрерывные случайные величины, функция распределения, плотность, обоснование метода обратной функции распределения, неэлементарные и элементарные распределения.
2. *Доклад студента*: моделирование экспоненциального распределения и степенного распределения (примеры 13.1, 13.2 [2]).
3. *Доклад студента*: относительно «сложный» вывод формулы метода обратной функции распределения (примеры 13.6 [2]).
4. Семестровое домашнее задание (СДЗ): формулировка (см. раздел 6 данной программы), срок выполнения – к семинарскому занятию 8.
5. Технология «вложенных замен» (п. 13.8 [2]).
6. *Доклад студента*: моделирование распределения экстремального распределения и распределения Вейбулла (пример 13.3 [2]).
7. Проверка моделирующих формул (п. 13.5 [2]).

ЗАДАНИЕ: Читать п.п. 13, 14 и приложение 3 [2]. По СДЗ: построение элементарных плотностей (до 20 шт.); конструирование содержательных примеров для пункта А.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

1. Стандартный метод моделирования случайных векторов (повторение): разложения совместной плотности, алгоритм моделирования, двумерный случай (п.п. 14.1, 14.2 [2]).
2. Технология «взвешенного параметра» (п. 14.3 [2]).
3. *Доклад студента*: «взвешенный» показатель экспоненты (пример 14.1 [2]).
4. *Доклад студента*: «усложненное» моделирование двумерного вектора (пример 14.2 [2]).

ЗАДАНИЕ: Читать п.п. 14, 15 и приложение 3 [2]. По СДЗ: конструирование примеров для пунктов А (если не выполнено) и Б.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

1. Метод интегральной суперпозиции: постановка задачи (п. 15.1 [2]).
2. *Доклад студента*: применение метода интегральной суперпозиции (пример 15.1 [2]).
3. Метод дискретной суперпозиции: вид плотности (п. 15.3 [2]).
4. Технология «формирования смеси» (п. 15.4 [2]).
5. *Доклад студента*: случай трех слагаемых в формуле плотности (п. 15.6 [2]).
6. *Доклад студента*: «усложненное» моделирование по методу дискретной суперпозиции (пример 15.3 [2]).

ЗАДАНИЕ: Читать п.п. 14-16 [2]. По СДЗ: конструирование примеров для пунктов А, Б (если не выполнено) и В.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

1. Мажорантный метод исключения: теоремы, обосновывающие метод (п. 16.1, 16.2 [2]).
2. *Доклад студента*: пример применения всех основных методов моделирования – распределение с полиномиальной плотностью (пример 16.2 [2]).

3. Технология «порчи» моделируемой плотности (п. 16.4 [2]).
4. *Доклад студента:* пример «испорченного» экспоненциального распределения (пример 16.1 [2]).
5. *Доклад студента:* «усложненное» моделирование по методу исключения (пример 16.3 [2]).
6. *Доклад студента:* моделирование по методу исключения – двумерный случай (пример 16.4 [2]).

ЗАДАНИЕ: Читать п. 13-16 и приложение 1 пособия [2]. По СДЗ: конструирование примеров для пунктов А, Б, В (если не выполнено) и Г.1, Г.2.

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7**

1. Стандартный метод Монте-Карло для вычисления интеграла, его погрешность и трудоемкость, оптимальный выбор плотности (п. П1.1 [2]).
2. *Доклад студента:* оценка сверху для дисперсии стандартного метода Монте-Карло – с обоснованием (п. 4.3 [2]).
3. Применение технологии «порчи» моделируемой плотности (п. П1.2 [2]).
4. *Доклад студента:* пример задачи по теме «Выборка по важности» (задача П1 [2]).
5. Возможности усложнения примеров по теме «Выборка по важности» (в частности, для СДЗ).
6. *Доклад студента:* усложненный пример по теме «Выборка по важности» (пример ПЗ [2]).

ЗАДАНИЕ: Читать п. 13-16 и приложение 1 пособия [2]. По СДЗ: конструирование примеров для пунктов А, Б, В, Г (если не выполнено) и Д; приготовить домашнее задание к сдаче.

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8**

1. Сдача домашнего задания.
2. *Студент у доски:* решение экзаменационной задачи по теме «Метод обратной функции распределения» (задача А2 [2]).
3. *Студент у доски:* решение экзаменационной задачи по теме «Моделирование случайного вектора» (задача Б3 [2]).
4. *Студент у доски:* решение экзаменационной задачи по теме «Метод дискретной суперпозиции» (задача В3 [2]).
5. *Студент у доски:* решение экзаменационной задачи по теме «Мажорантный метод исключения» (задача Г3 [2]).
6. *Студент у доски:* решение экзаменационной задачи по теме «Выборка по важности» (задача Д3 [2]).

ЗАДАНИЕ: Читать п. 1-9 пособия [2].

#### **ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9**

1. Обзор контрольных вопросов по теории методов Монте-Карло (см. далее подраздел Г раздела 6).
2. Разбор домашнего задания: обзор типичных ошибок.

**Г). Содержание семестрового домашнего задания** (на выполнение которого предусмотрено 20 учебных часов) подробно описано ниже в разделе 6.

#### **Д). Другие разделы курса**

В курсе также предусмотрено: **проведение коллоквиума** (4 учебных часа) по материалам Части 1 и Части 2 данного курса; **проведение консультаций** (12 учебных часов) – после изучения материалов частей 1-4; **самостоятельная работа студента** (суммарно равная объему лекций – 36 учебных часов); **проведение экзамена** (10 учебных часов).

## 5. Образовательные технологии дисциплины «Методы Монте-Карло»

Помимо «традиционных» форм преподавания (проведение лекций, практических занятий, консультаций, коллоквиума и экзамена) можно отметить ряд относительно новых оригинальных приемов (в том числе, интерактивных), позволяющих углубить знания студентов по методам Монте-Карло. К этим приемам относятся:

- студенческие реферативные доклады на учебных семинарах;
- обязательное творческое семестровое домашнее задание, выполнение которого основано на специальных технологиях, позволяющих создавать экзаменационные задачи и их аналоги (подробное описание см. в разделе 6 данной программы).

Важно также отметить, что для освоения данной дисциплины весьма полезными могли бы стать дополнительные занятия в компьютерных классах. На этих занятиях студенты могли бы, в частности, провести численные исследования сходимости метода Монте-Карло; в том числе, они могли бы убедиться в стремлении к нулю погрешности со скоростью  $1/\sqrt{n}$  при вычислении математического ожидания заданной им случайной величины, а также в правильности и эффективности разработанных ими в семестровом домашнем задании формул и алгоритмов моделирования случайных величин (используя построение гистограмм распределений и фиксируя время реализации соответствующего моделирующего алгоритма). Здесь весьма пригодились бы специальные электронные учебники, попытки создания которых описаны, в частности, в работе

*Бежанова М.М., Войтишек А.В., Квашинин Г.А., Москвина Л.А. Принципы организации электронного учебника «Основы методов Монте-Карло» // Материалы Международной научно-методической конференции «Новые информационные технологии в университетском образовании». Новосибирск: НГУ, 1996. С. 36-37.*

Работа над такими компьютерными пособиями подразумевает создание и финансовую поддержку группы грамотных программистов, выполняющих работы по соответствующему образовательному проекту.

Дальнейшее развитие навыков численного статистического моделирования для студентов связано с решением актуальных прикладных задач (в том числе, в рамках дипломной работы), прослушивание специальных курсов кафедры вычислительной математики, кафедры математической геофизики, кафедры математического моделирования и др.

## 6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины «Методы Монте-Карло»

### *А). Семестровое домашнее задание*

Опыт преподавания теории методов Монте-Карло на физическом и механико-математическом факультетах Новосибирского государственного университета показал целесообразность выполнения студентами следующего творческого домашнего задания.

*Приведите к примеров  $d$ -мерных случайных величин, реализации которых целесообразно получить:*

*А) методом обратной функции распределения,  $k = 2, d = 1$ ;*

*Б) стандартным методом моделирования многомерной случайной величины,  $k = 2, d = 2$ ;*

*В.1) методом интегральной суперпозиции,  $k = 1, d = 1$ ;*

*В.2) методом дискретной суперпозиции,  $k = 2, d = 1$ ;*

*Г.1) мажорантным методом исключения,  $k = 2, d = 1$ ;*

Г.2) мажорантным методом исключения,  $k = 1$ ,  $d = 2$ .

Опишите соответствующие алгоритмы, а для пунктов Г.1, Г.2 оцените сверху трудоемкость построенных алгоритмов.

Д). Приведите три примера четырехкратных интегралов, которые целесообразно вычислять методом Монте-Карло с использованием выборки по важности. Оцените сверху дисперсию соответствующих стохастических оценок метода Монте-Карло.

Примеры задания следует оформлять как задачи по соответствующим темам. Образцами оформления являются: для п. А: примеры 13.1-13.8, задачи А1-А3 пособия [2] (см. ниже раздел 7); для п. Б: примеры 14.1-14.3, задачи Б1-Б3 [2]; для п. В.1: пример 15.1 [2]; для п. В.2: примеры 15.2-15.4, задачи В1-В3 [2]; для п. Г.1: примеры 16.1, 16.3, задачи Г1-Г3 [2]; для п. Г.2: пример 16.4 [2]; для п. Д: примеры П1-П3, задачи Д1-Д3 [2].

Задачи оцениваются от нуля до трех баллов (таким образом, максимальный суммарный балл за все задание – 39). Студенты, набравшие 22 балла и выше, получают допуск до основного экзамена. Лучшие примеры, составленные студентами, могут быть использованы преподавателем при подготовке экзаменационных задач.

Для выполнения пунктов задания целесообразно использовать описанные в пособии [2] технологии: для п. А – технологию вложенных замен (см. технологию 13.1 [2]), для п.п. Б, В.1 – технологию взвешенного параметра (см. технологию 14.1 [2]), для п. В.2 – технологию формирования смеси распределений (см. технологию 15.1 [2]), для п.п. Г.1, Г.2, Д – технологии «порчи» моделируемого (одномерного или многомерного) распределения (см. технологии 16.1 и П1 [2]).

Основой успешного использования описанных технологий является умение конструировать элементарные плотности, т.е. такие, для которых эффективно реализуем метод обратной функции распределения. Особо отметим, что эти плотности нужны не только в пункте А, непосредственно посвященном методу обратной функции распределения, но и во всех остальных пунктах. Так, для каждого примера п. Б, В.1 при использовании технологии взвешенного параметра требуются две элементарные плотности (одна из которых – с параметром); также два моделируемых распределения, сосредоточенных на одном и том же интервале, нужны при применении технологии формирования смеси распределений в п. В.2; элементарная плотность, пропорциональная мажоранте, выбирается при применении технологии «порчи» моделируемой плотности (п. Г.1), а в соответствующем двумерном случае (в п. Г.2) требуются два элементарных распределения; наконец, в п. Д в каждом примере выбираются по четыре элементарных плотности распределения (для компонент используемого четырехмерного случайного вектора). Итого требуется около трех десятков элементарных плотностей, причем для получения высокой оценки за задание следует стремиться к тому, чтобы все эти функции были разными и отличались от элементарных плотностей, используемых в известных пособиях. Такую возможность дает технология вложенных замен. Здесь, однако, не следует использовать более трех вложенных замен (желательно, чтобы и сами плотности, и моделирующие формулы оставались «обозримыми», компактными). Кроме применения технологии вложенных замен к повышению оценок за примеры может привести увеличение числа слагаемых в технологии формирования смеси распределений, использование более сложных для исследования функций «порчи» др. Некоторые дополнительные возможности построения моделируемых плотностей описаны в работе [3] (см. далее раздел 7 данной программы). В частности, показан ряд альтернативных способов построения плотности распределения двумерного случайного вектора с зависимыми компонентами (рассмотрение непрямоугольных областей, замена переменных и др.), которые, однако, обладают меньшей степенью общности по сравнению с технологией взвешенного параметра.

## **Б). Организация экзамена**

Каждый экзаменационный билет содержит теоретический вопрос (совпадающий по формулировке с соответствующим названием раздела дисциплины из приведенной выше – в разделе 4 – таблицы) и одну задачу по одной из пяти тем (см. далее подраздел В). Время на подготовку – 1 час. При подготовке к ответу можно позволить студентам пользоваться материалами учебника [1] и пособия [2]. Важно, чтобы отвечающий студент четко решил и грамотно оформил решение задачи, и чтобы он разбирался в сути предложенных ему теоретических вопросов. Требуется также, чтобы экзаменуемый знал основную логику курса. Для проверки этого преподавателю следует задать ему несколько контрольных вопросов. При этом можно условно считать, что материал курса состоит из трех основных разделов: моделирование случайных величин, векторов и функций (часть 1 курса), вычисление интегралов методом Монте-Карло (часть 2), решение интегральных уравнений и приложения методов Монте-Карло (части 3, 4). Если экзаменуемый успешно ответил на теоретический вопрос из соответствующего раздела, то следует задать ему контрольные вопросы по двум другим разделам курса. Примеры таких вопросов приводятся ниже в подразделе Г.

## **В). Примеры экзаменационных задач**

**ПРИМЕР КОНТРОЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ»:**

*Сформулируйте метод обратной функции распределения и продемонстрируйте его на примере моделирования случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения*

$$f(u) = 3 \sin 2u \cos^4 u; \quad 0 < u < \frac{\pi}{2}.$$

**ПРИМЕР КОНТРОЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ВЕКТОРА»:**

*Сформулируйте стандартный метод моделирования случайного вектора и продемонстрируйте его на примере двумерного вектора  $(\xi, \eta)$ , имеющего плотность распределения*

$$f(u, v) = \frac{3v \sin v e^{-3uv}}{1 - e^{-v}}; \quad 0 < u < \frac{1}{3}; \quad 0 < v < \frac{\pi}{2}.$$

**ПРИМЕР КОНТРОЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНОЙ СУПЕРПОЗИЦИИ»:**

*Сформулируйте метод дискретной суперпозиции и продемонстрируйте его на примере моделирования случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения*

$$f(u) = \frac{3 \cos \sqrt{u}}{8\sqrt{u}} + \frac{1}{\pi^2}; \quad 0 < u < \frac{\pi^2}{2}.$$

**ПРИМЕР КОНТРОЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ МЕТОДОМ ИСКЛЮЧЕНИЯ»:**

*Сформулируйте метод исключения и продемонстрируйте его на примере моделирования случайной величины  $\xi$ , имеющей плотность распределения, пропорциональную функции*

$$g(u) = \left( 2 + \frac{\arcsin u}{5\pi} \right) u^3; \quad 0 < u < 1.$$

*Оцените трудоемкость метода.*

## ПРИМЕР КОНТРОЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ «ВЫБОРКА ПО ВАЖНОСТИ»:

Сформулируйте метод выборки по важности и продемонстрируйте его на примере вычисления интеграла

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x_2 x_3^2 x_4^3 \sqrt{2 + \cos(6x_1 x_2^3 x_3^7 x_4^9)}) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

Оцените дисперсию соответствующей оценки.

### Г). Дополнительные контрольные вопросы на экзамене

#### Контрольные вопросы по разделу

##### «Моделирование случайных величин, векторов и функций»

Что такое стандартное случайное число  $\alpha$  ?

Как реализуются выборочные значения стандартного случайного числа на ЭВМ?

Каковы принципы построения физического датчика стандартных случайных чисел?

Что такое метод вычетов?

Каким образом происходит тестирование генераторов стандартных случайных чисел?

Опишите стандартный алгоритм моделирования дискретной случайной величины.

Опишите специальный алгоритм моделирования равномерного дискретного распределения.

Напишите основное интегральное соотношение для метода обратной функции распределения.

Опишите стандартный алгоритм моделирования двумерного случайного вектора.

Как выглядит плотность распределения случайной величины, для численного моделирования которой эффективно применим метод дискретной суперпозиции?

Почему для плотности, представляющей собой сумму неотрицательных функций, нормирующие коэффициенты, превращающие слагаемые в плотности, имеют смысл вероятностей?

Опишите метод дискретной суперпозиции.

Опишите мажорантный метод исключения.

В каких случаях применимы алгоритмы метода обратной функции распределения, метода суперпозиции и мажорантного метода исключения для моделирования случайной величины с полиномиальной плотностью распределения?

Напишите формулу моделирования гамма-распределения с целым параметром.

Напишите формулы моделирования стандартного нормального распределения.

#### Контрольные вопросы по разделу

##### «Вычисление интегралов методом Монте-Карло»

Как вычислить математическое ожидание методом Монте-Карло?

Какая теорема теории вероятностей обосновывает метод Монте-Карло?

Как записать интеграл в виде математического ожидания?

Каков порядок погрешности метода Монте-Карло (по числу испытаний)?

Какой вид имеет аналитическое выражение для погрешности метода Монте-Карло?

Какая теорема теории вероятностей является основой получения аналитического выражения для погрешности метода Монте-Карло?

Как оцениваются затраты метода Монте-Карло?

Что такое трудоемкость метода Монте-Карло?

Как вычисляются дисперсия оценки и среднее время реализации одного выборочного значения?

Почему при реализации методов Монте-Карло стараются (при прочих равных условиях) уменьшить дисперсию соответствующей стохастической оценки?

Какой выбор плотности дает наименьшую дисперсию весовой оценки метода Монте-Карло для задачи вычисления интеграла?

Что такое метод выборки по важности?

Как учитываются особенности подынтегральной функции, описываемые дельта-функциями, при построении оценок метода Монте-Карло?

Какие методы уменьшения дисперсии для задачи вычисления интеграла Вы знаете?

### ***Контрольные вопросы по разделу «Решение интегральных уравнений и приложения метода Монте-Карло»***

Математическая модель какого физического процесса исторически явилась толчком для развития теории алгоритмов численного статистического моделирования?

Опишите простейшую математическую модель процесса переноса излучения.

Какие вероятностные распределения приходится моделировать при реализации прямого моделирования процесса переноса излучения?

Какой вероятностный процесс образуют состояния столкновений в модели переноса излучения?

Какому уравнению удовлетворяет суммарная плотность столкновений для процесса переноса излучения?

В каком случае ряд Неймана является единственным решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода?

Как проверить, что ряд Неймана является решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода?

Опишите все обозначения в выражении для оценки по столкновениям  $\zeta = \sum_{m=0}^N Q^{(m)} h(\xi^{(m)})$ .

Чему равно математическое ожидание оценки по столкновениям?

Почему линейный функционал от решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода можно трактовать как сумму интегралов бесконечно возрастающей кратности?

Как связана идея построения оценки по столкновениям с методом выборки по важности?

Что такое однородная цепь Маркова, обрывающаяся с вероятностью единица?

Каким образом реализуется обрыв при моделировании траекторий однородной цепи Маркова, обрывающейся с вероятностью единица?

Опишите алгоритм моделирования траекторий однородной цепи Маркова, обрывающейся с вероятностью единица.

Опишите алгоритм метода Монте-Карло для приближения линейного функционала от решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Что такое прямое моделирование?

Что такое локальная оценка метода Монте-Карло?

Почему в прикладных задачах чаще применяется метод сопряженных блужданий, а не «функциональная» локальная оценка?

## **7. Учебно-методическое обеспечение дисциплины «Методы Монте-Карло»**

### ***А). Основная литература***

1. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд. центр «Академия», 2006.
2. Войтишек А.В. Символьные и численные расчеты в физических приложениях. Основы метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2006.
3. Войтишек А.В. Основы метода Монте-Карло. Семестровое домашнее задание. Новосибирск: НГУ, 2002.



### **Б). Дополнительная литература**

4. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.
5. Михайлов Г.А. Оптимизация весовых методов Монте-Карло. М.: Наука, 1987.
6. Михайлов Г.А. Весовые методы Монте-Карло. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2000.
7. Михайлов Г.А. Весовые алгоритмы статистического моделирования. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2003.
8. Михайлов Г.А., Медведев И.Н. Использование сопряженных уравнений в методе Монте-Карло: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2009.
9. Войтишек А.В. Дополнительные сведения о численном моделировании случайных элементов. Новосибирск: НГУ, 2007.
10. Войтишек А.В. Дискретно-стохастические модификации метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2009.

### **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины «Методы Монте-Карло»**

Обеспечено наличие достаточного количества экземпляров основной литературы, а также книг из дополнительного списка в библиотеке НГУ; кроме того, pdf-версии пособий [1, 2, 9, 10] имеются на сайте механико-математического факультета НИУ-НГУ по адресу [mmf.nsu.ru/education/materials](http://mmf.nsu.ru/education/materials) в разделе «Вычислительная математика. Методы Монте-Карло. Обратные задачи, томография». Гарантировано выделение лекционных аудиторий в зданиях НГУ или ИВМиМГ СО РАН, возможность проведения научных консультаций на территории ИВМиМГ СО РАН.

Авторы: \_\_\_\_\_ Михайлов Геннадий Алексеевич  
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН

\_\_\_\_\_ Войтишек Антон Вацлавович  
д.ф.-м.н., профессор

Рецензент (ы) \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Программа одобрена на заседании \_\_\_\_\_  
(Наименование уполномоченного органа вуза (УМК, НМС, Ученый совет))  
от \_\_\_\_\_ года, протокол № \_\_\_\_\_