

Функциональный анализ

2014 – 2015 учебный год (математика, бакалавриат)

Программа курса лекций

д.ф.-м.н., профессор *Гутман Александр Ефимович*

Векторные пространства

Абелева группа. Поле. Векторное пространство. Степень векторного пространства. Овеществление. Изоморфизм. Фinitные семейства и их суммы. Векторное подпространство. Линейная оболочка. Фактор-пространство.

Базис и размерность

Базис Гамеля. Линейно независимое множество. Лемма Цорна. Существование базиса. Теорема Кантора — Шредера — Бернштейна. Оценки мощности. Равномощность базисов. Размерность. Общий вид векторного пространства. Критерий изоморфности. Связь между мощностью и размерностью. Разложение в прямую сумму и алгебраическое дополнение. Коразмерность.

Линейные операторы

Линейный оператор. Пространство операторов. Образ и ядро оператора. Снижение оператора на фактор-пространство. Кообраз. Линейные проекторы. Задание оператора значениями на базисе. Аддитивные, но не однородные функции. Продолжение оператора. Размерность сопряженного пространства. Разрешимость уравнений от операторов. Критерий линейной зависимости функционалов. Биортогональные векторы и функционалы. Овеществление и комплексификация.

Нормированные пространства

Экскурс в теорию интеграла Лебега. Норма. Топологические понятия. Замкнутые подпространства. Полунорма. Факторизация по полунорме. Примеры нормированных пространств. Нормированное фактор-пространство. Существование нормы с заданными значениями. Геометрическое описание единичного шара. Сравнение норм. Эквивалентные нормы. Нормированные решетки. Плотные подмножества и сепарабельность.

Ограниченные линейные операторы

Операторная норма. Примеры ограниченных и неограниченных операторов. Топологически сопряженное пространство. Схема вычисления нормы оператора. Критерии ограниченности оператора. Линейное преобразование ряда. Ограниченность оператора на конечномерном пространстве. Норма снижения оператора. Замкнутость образа проектора. Норма овеществления и комплексификации. Непрерывное продолжение функционала. Линейная изометрия.

Сопряженные нормированные пространства

Задача описания сопряженного пространства. Реализация линейной изометрии билинейной формой. Описание сопряженных к классическим нормированным пространствам. Проблема описания сопряженного к пространству ограниченных последовательностей. Алгебра подмножеств и ступенчатые функции. Заряд на алгебре. Интеграл по заряду. Фильтры и ультрафильтры. Приложение к описанию сопряженного пространства.

Банаховы пространства

Полные метрические пространства. Банаховы пространства. Пополнение. Полнота прямой банаховой суммы. Критерий полноты в терминах рядов. Полнота пространства операторов. Примеры банаховых пространств. Пределы сетей. Суммируемые семейства. Полнота факторпространства.

Гильбертовы пространства

Скалярное произведение. Примеры гильбертовых пространств. Неравенство Коши — Буняковского. Поляризация тождество. Закон параллелограмма и теорема фон Неймана — Йордана.

Гильбертов базис

Ортогональные семейства. Теорема Пифагора. Неравенство Бесселя. Эквивалентные описания гильбертова базиса. Теорема Стеклова. Равенство Парсеваля. Существование гильбертова базиса. Связь с базисом Гамеля. Гильбертова размерность. Ортогонализация. Критерий сепарабельности. Теорема Рисса — Фишера об изоморфизме. Теорема Рисса о штриховании.

Эрмитово сопряженные операторы

Существование эрмитово сопряженного оператора. Эрмитовы, положительные, нормальные и унитарные операторы. Характеризация эрмитовых операторов. Вещественная и мнимая части оператора. Характеризация унитарных операторов. Положительные операторы.

Ортопроекторы

Ортопроекция. Метрическая характеристика ортопроекции. Существование ортопроекции. Ортогональное дополнение и ортопроекторы. Эквивалентные описания ортопроектора. Примеры.

Теорема Хана — Банаха и ее следствия

Сублинейный функционал. Теорема Хана — Банаха. Продолжение ограниченного функционала. Следствия о множестве функционалов. Двойное штрихование и рефлексивность. Теорема об отделимости. Биортогональные векторы и ограниченные функционалы. Размерность топологически сопряженного пространства. Дополняемость конечномерного подпространства.

Теорема Бэра о категории и ее следствия

Нигде не плотные и тощие множества. Категорные свойства векторных подпространств. Теорема Бэра о категории. Ограничение на размерность банахова пространства. Основной принцип Банаха. Принцип ограниченности. Слабая и слабая* ограниченность и сходимости. Соотношения между разными видами ограниченности и сходимости.

Идеально выпуклые множества

Идеально выпуклое множество. Внутренность замыкания идеально выпуклого множества. Основной принцип Банаха для идеально выпуклых множеств. Идеально выпуклое соответствие. Теорема Банаха о гомоморфизме. Теорема о прообразе последовательности.

Критерии слабой сходимости

Слабая сходимости в конечномерных пространствах. Теорема Банаха — Штейнгауза. Достаточные условия сильной, слабой и слабой* сходимости. Критерии слабой сходимости в классических пространствах.

Слабая топология

Экскурс в общую топологию. Различные подходы к введению топологии и их эквивалентность. Определимость топологии сходимостью сетей. Сравнение топологий. База топологии. Топология нормы и слабая топология. Свойства слабой окрестности. Критерий совпадения слабой топологии с топологией нормы. Топология Фреше.

Теорема Банаха о замкнутом графике

Замкнутые операторы. Критерий ограниченности конечномерного оператора. Теорема о замкнутом графике. Критерий ограниченности проектора. Принцип дополняемости. Теорема Банаха об изоморфизме. Принцип двух норм. Разложение в прямую сумму банаховых подпространств. Описание банаховых образов. Критерий Като.

Сопряженные операторы

Определение и свойства сопряженного оператора. Связь эрмитова и топологического сопряжения. Отождествление пространств посредством билинейной формы и методы вычисления сопряженного оператора. Прямая и обратная поляры и их свойства. Лемма о полярах и теорема Фредгольма. Нормально разрешимые операторы. Теорема Хаусдорфа. Связи между свойствами оператора и сопряженного к нему. Сопряжение ядра и коядра.

Компактность в банаховых пространствах

Свойства компактных множеств. перпендикуляры и почти перпендикуляры. Критерий Рисса. Вполне ограниченные и относительно компактные множества. Критерий Хаусдорфа. Критерии компактности в классических банаховых пространствах. Компактный оператор — определение, свойства и примеры. Свойства пространства компактных операторов. Теорема Шаудера. Теорема Фредгольма об операторе $I - K$.

Фредгольмовы операторы

Нётеровы и фредгольмовы операторы, индекс оператора. Сопряжение нётерова оператора. Альтернатива Фредгольма. Почти обратимые операторы. Критерий Нётера. Композиция нётеровых операторов. Тожество Эйлера. Теорема Аткинсона. Теорема о компактных возмущениях. Критерий Никольского.

Спектр и резольвента

Алгебра ограниченных операторов. Полиномиальное функциональное исчисление. Целое функциональное исчисление. Спектр оператора. Теорема о ряде Неймана. Ограниченность спектра. Теорема Банаха об обратимых операторах. Замкнутость спектра. Резольвента оператора. Непрерывность операции взятия обратного оператора. Непрерывность резольвенты. Интеграл от непрерывной вектор-функции по скалярной мере. Контурный интеграл. Голоморфные вектор-функции. Голоморфность резольвенты. Непустота спектра. Интеграл Рисса — Данфорда. Теорема Гельфанда — Данфорда. Голоморфное функциональное исчисление. Теорема об отображении спектра. Теорема Данфорда о сложной функции. Критерий Вейля. Теорема о границах спектра. Спектральный радиус. Формулы Гельфанда и Бёрлинга — Гельфанда.

Основная литература

1. Кутателадзе С. С.
Основы функционального анализа. Изд. 5-е
Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2006
2. Рудин У.
Функциональный анализ
М.: Лань, 2005
3. Хелемский А. Я.
Лекции по функциональному анализу
М.: МЦНМО, 2004

Дополнительная литература

4. Канторович Л. В., Акилов Г. П.
Функциональный анализ. Изд. 4-е
С.-Петербург: БХВ, 2004
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В.
Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 7-е
М.: Физматлит, 2009
6. Lax P.
Functional Analysis
New York: Wiley-Interscience, 2002
7. Антоневи́ч А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В.
Задачи и упражнения по функциональному анализу
М.: УРСС, 2004
8. Данфорд Н., Шварц Дж.
Линейные операторы. Т. 1: Общая теория
М.: УРСС, 2004

Интернет-ресурс

9. Гутман А. Е.
Функциональный анализ. Конспекты лекций
Еженедельно обновляемый файл
<http://my.nsu.ru/uisws/>
(материал «Конспекты лекций» курса «Функциональный анализ»)