

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)**

УТВЕРЖДАЮ

«___» _____ 201__ г.

Рабочая программа дисциплины
Методы вычислений: дополнительные главы

Направление подготовки
010800 – Механика и математическое моделирование

Квалификация (степень) выпускника
Бакалавр

Форма обучения
Очная

Новосибирск 2014

Аннотация рабочей программы

Дисциплина «Методы вычислений: дополнительные главы» входит в Базовую часть Естественного цикла ООП по направлению подготовки «010800 – Механика и математическое моделирование», все профили подготовки. Дисциплина реализуется на Механико-математическом факультете Новосибирского государственного университета кафедрой Математического моделирования ММФ НГУ.

Содержание дисциплины охватывает основные методы и подходы, применяющиеся для численного решения многомерных уравнений математической физики, а также вопросы исследования свойств и особенностей реализации этих алгоритмов на ЭВМ.

Дисциплина нацелена на формирование общекультурных компетенций ОК-6, ОК-7, ОК-8, ОК-10, ОК-11, профессиональных компетенций ПК-2 – ПК-5, ПК-7 – ПК-8, ПК-11, ПК-15, ПК-17, ПК-19 – ПК-23 выпускника.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, контрольная работа, самостоятельная работа студента, экзамены.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль успеваемости в форме самостоятельных, индивидуальных работ, промежуточный контроль в форме контрольной работы. Рубежный контроль – в форме экзамена.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единицы, 130 академических часа (из них 54 аудиторных). Программой дисциплины предусмотрены 36 часов лекционных и 18 часов практических занятий, а также 60 часов самостоятельной работы студентов. Остальное время – различным формам контроля успеваемости.

1. Цели освоения дисциплины (курса)

Курс «Методы вычислений: дополнительные главы» предназначен для студентов четвертого курса механико-математического факультета университета. Основной целью освоения дисциплины является изучение современных методов численного решения многомерных уравнений и систем уравнений в частных производных, в частности, уравнений механики сплошной среды – жидкости и газа.

Для достижения поставленной цели выделяются следующие задачи курса:

- Изложение основных методов исследования аппроксимации и устойчивости конечно-разностных схем;
- Сопоставление явных и неявных конечно-разностных схем;
- Изучение подходов к построению экономичных разностных схем для многомерных уравнений в частных производных.
- Изложение основных методов решения больших СЛАУ с разреженными матрицами;
- Изложение метода конечных объемов для дискретизации законов сохранения;
- Изложение путей повышения точности численного решения;
- Изложение современных подходов к численному решению многомерных уравнений газовой динамики, уравнений Навье-Стокса вязкого теплопроводного газа, уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости.

В практической части курса формируются навыки анализа свойств вычислительных алгоритмов и построения эффективных алгоритмов для многомерных уравнений в частных производных.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Методы вычислений: дополнительные главы» входит в Базовую часть Естественного цикла ООП по направлению подготовки «010800 – Механика и математическое моделирование», все профили подготовки.

Дисциплина «Методы вычислений. Дополнительные главы» является естественным продолжением читаемого на 3-м курсе бакалавриата курса лекций «Методы вычислений», который посвящен основам численных методов для обыкновенных уравнений и уравнений в частных производных. В курсе «Методы вычислений» построение и исследование алгоритмов ведется на примере модельных, как правило, одномерных, уравнений переноса и теплопроводности. В настоящем курсе делаются следующие шаги: рассматриваются особенности построения численных алгоритмов для многомерных, нелинейных задач, методы решения уравнений Эйлера и Навье-Стокса механики жидкости и газа.

Дисциплина «Методы вычислений: дополнительные главы» опирается на следующие дисциплины данной ООП:

- Математический анализ (знание теории пределов, рядов, интегралов);
- Программирование (знание алгоритмических основ написания эффективных программ и особенностей современных информационных систем);
- Вычислительные методы линейной алгебры (навыки применения итерационных методов решения нелинейных уравнений и СЛАУ);
- Методы вычислений (владение математическим аппаратом теории разностных схем, знание численных методов решения задач для уравнений параболического и гиперболического типа);
- Математическое моделирование (владение математическим аппаратом моделей, основанных на законах сохранения, знание аксиоматики, законов движения и термодинамики сплошной среды);

- Уравнения математической физики (знание теории корректных и некорректных задач математической физики, умение получать классические и обобщенные решения уравнений математической физики, знание их свойств);
- Механика сплошных сред: жидкости и газы (знание основ теории термодинамики, свойств политропного газа, характеристик уравнений газовой динамики, одномерной задачи о распаде произвольного разрыва; свойств уравнений Навье-Стокса движения несжимаемой жидкости, потенциала, функции тока);

Результаты освоения дисциплины «Методы вычислений: дополнительные главы» используются при изучении следующих дисциплин данной ООП:

- Математическое моделирование динамики сжимаемой жидкости и газа;
- Современные методы вычислительной математики;
- Геофизическая гидродинамика;
- Уравнения Навье-Стокса.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Методы вычислений: дополнительные главы»:

- общекультурные компетенции: ОК-6, ОК-7, ОК-8, ОК-10, ОК-11;
- профессиональные компетенции: ПК-2 – ПК-5, ПК-7 – ПК-8, ПК-11, ПК-15, ПК-17, ПК-19 – ПК-23.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- **иметь представление** об основных математических моделях механики сплошных сред – жидкости и газа; о современных численных методах их решения.
- **знать** основные методы исследования аппроксимации, устойчивости и сходимости конечно-разностных схем; подходы к решению многомерных уравнений в частных производных; знать их достоинства и недостатки; методы решения больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений.
- **уметь** строить и исследовать методы конечных-разностей и конечных-объемов для решения многомерных нелинейных уравнений в частных производных.

4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единицы, 130 часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра). Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекция	Семинар	Самостоятельная работа	Контрольная работа	Экзамен	
1.	Общие методы численного решения многомерных уравнений								
1.1	Технологическая цепочка математического моделирования. Основные уравнения математической физики.	7	1	2		2			
1.2	Основные понятия и подходы к исследованию разностных схем. Аппроксимация, устойчивость, сходимость.	7	2	2	2	2			

1.3	Реализация вычислительных алгоритмов. Скалярная, векторная и матричная прогонка. Другие методы решения больших СЛАУ.	7	3	2		4			
1.4	Явные разностные схемы для гиперболических и параболических уравнений.	7	4	2	2	2			
1.5	Консервативные схемы.	7	5	2		4			
1.6	Метод конечных объемов.	7	6	2	2	4			
1.7	Противопотоковые схемы для линейных и нелинейных уравнений и систем.	7	7	2		4			
1.8	Неявные схемы для гиперболических и параболических уравнений. Линеаризация нелинейных неявных схем.	7	8	2	2	4			
1.9	Реализация неявных схем в многомерном случае. Метод дробных шагов (метод расщепления). Метод приближенной факторизации. Метод предиктор-корректор.	7	9	2		4			
1.10	Метод Гаусса-Зейделя. Альтернативные подходы к реализации неявных схем в многомерном случае.	7	10	2	2	4			
1.11	Реализация краевых условий.	7	11	2		2	2		Контрольная работа (оценка)
2.	Методы повышения точности решений								
2.1	Аппроксимация на неравномерных сетках. Повышение порядка точности на расширенном шаблоне.	7	12	2	2	2			
2.2	Монотонные схемы.	7	13	2		4			
2.3	Компактные разностные схемы в одномерном и многомерном случае.	7	14	2	2	2			
3.	Методы решения многомерных задач гидро- и газодинамики								
3.1	Схемы для решения уравнений движения сжимаемого газа. Метод приближенной факторизации.	7	15	2		4			
3.2	Метод расщепления и предиктор-корректор в задачах аэродинамики.	7	16	2	2	4			
3.3	Подходы к решению уравнений движения несжимаемой жидкости. Метод искусственной сжимаемости.	7	17	2		4	2		Контрольная работа (оценка)
3.4	Проекционные методы дробных шагов для уравнений движения несжимаемой жидкости.	7	18	2	2	4		12	Экзамен (оценка)
	ВСЕГО – 130 часов:			36	18	60	4	12	

5. Образовательные технологии

Преподавание курса «Методы вычислений: дополнительные главы» ведется путем чтения лекций и проведения семинаров в сочетании с внеаудиторной работой по решению практических задач и упражнений по материалу, изложенному на лекциях и семинарах.

Лекционный материал включает теоретические основы современных методов и подходов к численному решению многомерных уравнений в частных производных, овладевают методами исследования аппроксимации, сходимости, эффективности реализации разностных схем.

На семинарских занятиях студенты тренируют практические навыки построения и анализа свойств численных алгоритмов для различных задач математической физики.

Внеаудиторная работа организована путем самостоятельного решения студентами как типовых задач, так и задач повышенной сложности, требующей творческого подхода.

Занятия проводят сотрудники базовых институтов СО РАН, которые ориентируют студентов о современных направлениях научных исследований.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Самостоятельная работа студентов предусматривает изучение теоретического материала и решение практических задач. Теоретический материал изучается в форме проработки прочитанных лекций, а также в изучении рекомендованной литературы. Задачи решаются в форме выполнения домашних заданий. При этом студенты имеют возможность пользоваться методическими разработками и учебными пособиями, представленными в библиотеке и читальных залах. Текущий контроль осуществляется в форме контрольных вопросов на семинарах, проверок решения домашних заданий, а также проведением двух контрольных работ. Финальная аттестация по итогам освоения дисциплины согласно учебному плану осуществляется в форме экзамена. Экзаменационный билет включает два теоретических вопроса и задачу по теме, отличающейся от вопросов.

6.1. Примерный перечень контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы:

1. Законы сохранения. Преобразование координат. Представление уравнений в дивергентной и недивергентной форме.
2. Аппроксимация дифференциальных операторов и разностных схем.
3. Сходимость и устойчивость. Необходимый спектральный признак Неймана.
4. Методы решения системы уравнений $Ax=b$ с разреженной матрицей A .
5. Скалярная, векторная и матричная прогонка.
6. Метод установления. Понятие полной аппроксимации.
7. Основные разностные схемы решения одномерных нелинейных гиперболических уравнений.
8. Явные разностные схемы для гиперболических и параболических уравнений. Достоинства и недостатки явных схем.
9. Схемы Рунге-Кутты.
10. Консервативные схемы. Определение и способы построения.
11. Метод конечных объемов.
12. Связь метода конечных объемов с методом конечных разностей.
13. Способы аппроксимации невязких потоков через грани ячеек.
14. Аппроксимация вязких потоков в методе конечных объемов.
15. Сравнение методов конечных разностей, конечных объемов и конечных элементов на примере линейного уравнения переноса. Достоинства и недостатки подходов.

16. Противопотоковые схемы для скалярного уравнения переноса и системы линейных гиперболических уравнений.
17. Построение противопотоковых схем для нелинейных уравнений.
18. Построение противопотоковых схем на основе решения задачи о распаде произвольного разрыва. Схема Годунова, Схема Роу.
19. Неявные схемы для одномерных гиперболических и параболических уравнений. Реализация нелинейных схем. Метод линеаризации.
20. Особенности реализации неявных алгоритмов в многомерном случае.
21. Метод дробных шагов (метод расщепления). Аппроксимация и устойчивость в многомерном случае.
22. Метод приближенной факторизации. Аппроксимация и устойчивость в многомерном случае.
23. Потеря безусловной устойчивости схемы факторизации для гиперболических уравнений в трехмерном случае.
24. Метод Гаусса-Зейделя. Аппроксимация и устойчивость в многомерном случае.
25. Методы, основанные на использовании альтернативных решателей системы алгебраических уравнений с разреженной матрицей.
26. Реализация краевых условий. Входная, выходная границы, твердая стенка.
27. Аппроксимация дифференциальных операторов на неравномерных сетках.
28. Повышение порядка точности на расширенном шаблоне.
29. Реконструкция переменных на грань ячейки в методе конечных объемов.
30. Понятие монотонности разностной схемы. Теорема Годунова.
31. Способы монотонизации схем высокого порядка аппроксимации.
32. Компактные разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений.
33. Компактные разностные схемы для уравнений в частных производных. Устойчивость и реализация компактных схем в многомерном случае.
34. Схема Бима – Уорминга для уравнений газовой динамики.
35. Схема МакДональда – Брили для уравнений Навье-Стокса движения сжимаемого газа.
36. Схема расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям для уравнений газовой динамики.
37. Схема предиктор-корректор для решения уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа.
38. Противопотоковая схема конечных объемов для уравнений газовой динамики.
39. Метод искусственной сжимаемости для решения уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости.
40. Метод дробных шагов (коррекции давления) для решения уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости.

6.2. Примеры задач для контрольных работ и экзамена:

1. Исследовать аппроксимацию и устойчивость разностной схемы

$$\frac{3u_{jk}^{n+1} - 4u_{jk}^n + u_{jk}^{n-1}}{2\tau} = \Lambda_{11}u_{jk}^{n+1} + \Lambda_{22}u_{jk}^{n+1} \quad \text{для уравнения } u_t = u_{xx} + u_{yy}.$$

2. Исследовать аппроксимацию и устойчивость разностной схемы

$$(I + \tau\alpha a\Lambda_1)(I + \tau\alpha b\Lambda_2) \frac{u_{jk}^{n+1} - u_{jk}^n}{\tau} = -(a\Lambda_1 + b\Lambda_2)u_{jk}^n$$

для уравнения $u_t + au_x + bu_y = 0$.

3. Построить явную условно-устойчивую противопотоковую схему для системы

$$\text{уравнений } \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \text{где } U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & p \end{pmatrix}, \quad p = \text{const.}$$

4. Построить явную условно-устойчивую консервативную схему для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x_1} + \frac{\partial g(u)}{\partial x_2} = 0.$$

5. Построить схему приближенной факторизации для многомерного уравнения

теплопроводности
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0.$$

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Ковеня В. М. Разностные методы решения многомерных задач: Курс лекций / Новосибир. гос. ун-т. Новосибирск, 2004. 146 с.
2. Ковеня В. М., Чирков Д.В. Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики: Учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013.
3. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений в 4 ч.: Учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2008. Часть 3. Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов. 163 с.
4. Лебедев А. С., Черный С. Г. Практикум по численному решению уравнений в частных производных. – Учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2000. 136 с.
5. Годунов С. К. Рябенкий В. С. Разностные схемы: Введение в теорию. М.: Наука, 1973. 400 с.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. Изд. 3. М.: Наука, 1989. 616 с.
7. Ковеня В.М. Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогазодинамики. Рос. акад. наук, Сиб. отд – ние, 2014, 280 с.

б) дополнительная литература

1. Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: 2nd Ed., Springer-Verlag, 1999.
2. Fletcher C. A. J., Computational Techniques for Fluid Dynamics: Vol. I, II. 2nd Ed., Springer-Verlag, Berlin, 1991.
3. Ferziger J., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics: 3rd Ed., Springer, 2002.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

На первой и пяти последних лекциях в аудитории необходим персональный компьютер с мультимедийным проектором и экраном для демонстрации презентаций и примеров расчетов многомерных задач аэро- и гидродинамики.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО с учетом рекомендаций и ПрООП ВПО по направлению «010800 – Механика и математическое моделирование», все профили подготовки.

Автор: _____ Чирков Денис Владимирович
к.ф.-м.н., старший преподаватель
ММФ НГУ

Рецензент (ы) _____

Программа одобрена на заседании _____
(Наименование уполномоченного органа вуза (УМК, НМС, Ученый совет))
от _____ года, протокол № _____