

Программа курса
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
для студентов 1-2 курсов ММФ НГУ, 2014 год
Лектор — д.ф.м.н. Алаев П.Е.

I. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (ИВ)

1. Формулы ИВ. Исчисление секвенций (ИС). Вывод в ИС.
2. Семантика ИВ. Таблицы истинности. Теорема о корректности исчисления ИС.
3. Допустимые правила вывода. Примеры.
4. Синтаксическая эквивалентность формул ИВ. Теорема о замене. Вывод основных эквивалентностей.
5. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы. Приведение формул к нормальным формам.
6. Теорема о полноте исчисления ИС.
7. Приведение формул к совершенным нормальным формам.

II. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Простейшие свойства множеств и операции над ними. Упорядоченные пары и n -ки. Декартово произведение множеств.
2. Бинарные отношения и функции. Композиция функций. Инъективные и сюръективные функции, биекции.
3. Отношения эквивалентности. Теорема о связи отношений эквивалентности и разбиений множества.
4. Частичные порядки и частично упорядоченные множества (ч.у.м.). Изоморфизмы ч.у.м. Фундированные порядки, принцип индукции.
5. Линейно упорядоченные множества.
6. Вполне упорядоченные множества, их свойства. Теорема о сравнении вполне упорядоченных множеств.
7. Аксиома выбора, лемма Цорна, теорема Цермело.
8. Парадокс Рассела. Аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля с аксиомой выбора (ZFC).
9. Сравнение множеств по мощности. Теорема Кантора-Бернштейна. Теорема о сравнимости мощностей. Теорема Кантора.
10. Мощности объединения и декартова произведения множеств. Мощность множества слов в данном алфавите.
11. Ординалы, их основные свойства. Теорема об изоморфизме между в.у.м. и ординалом. Принципы трансфинитной индукции и рекурсии. Сумма и произведение ординалов.
12. Кардиналы. Теорема о равномощности множества кардиналу.

III. ЯЗЫК ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ И ЕГО СЕМАНТИКА

1. Термы и формулы ИП.
2. Алгебраические системы данной сигнатуры. Изоморфизм систем. Подсистема, порождённая данным множеством.
3. Истинность формул ИП в алгебраических системах. Сохранение формул при изоморфизме.
4. Семантическая эквивалентность формул. Тавтологически истинные формулы. Выполнимые множества формул.
5. Фильтры и ультрафильтры. Теорема о расширении централизованного семейства до ультрафильтра.
6. Прямые и фильтрованные произведения алгебраических систем. Теорема Лося.
7. Теорема компактности Мальцева.
8. Формулировка аксиом ZFC на языке формул ИП.
9. Предварённая нормальная форма.

IV. СЕКВЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ С РАВЕНСТВОМ (СИПР)

1. Аксиомы и правила вывода СИПР. Деревья вывода.
2. Допустимые правила вывода. Синтаксическая эквивалентность формул.
3. Теорема о корректности СИПР.
4. Полные множества предложений, теории.
5. Теории Хенкина, их свойства. Лемма Хенкина.
6. Теорема о существовании модели.
7. Теорема Гёделя о полноте СИПР.
8. Равносильность синтаксического и семантического следования.
9. Теории, порождённые данным множеством аксиом.
10. Формализация понятия доказательства в математике.

V. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МОДЕЛЕЙ

1. Элементарные теории алгебраических систем.
2. Теорема о спектре мощностей моделей теории. Теорема Левенгейма-Сколема.
3. Эрбрановы дизъюнкции. Теорема Эрбрана.
4. Аксиоматизируемые классы. Элементарная теория класса систем.
5. Элементарно эквивалентные системы. Критерий аксиоматизируемости класса.
6. Критерий конечной аксиоматизируемости.
7. Критерий универсальной аксиоматизируемости.

VI. ИСЧИСЛЕНИЯ ГИЛЬБЕРТОВСКОГО ТИПА

1. Аксиомы и правила вывода ИВ гильбертовского типа.
2. Определение вывода. Теорема дедукции.
3. Теорема об эквивалентности ИС и ИВ гильбертовского типа.

VII. ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

1. Операторы суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Примитивно рекурсивные (п.р.ф.) и частично-рекурсивные функции (ч.р.ф.)
2. Базисный набор п.р.ф. Лемма о суммировании и произведении функций.
3. Рекурсивные множества и предикаты, их свойства.
4. Оператор ограниченной минимизации.
5. Возвратная рекурсия.
6. Канторовская нумерация пар и кортежей. Функция Гёделя.
7. Универсальные ч.р.ф. Нормальная форма Клини.
8. Рекурсивно перечислимые множества, их свойства.
9. Теорема о графике. Теорема Поста.
10. Существование рекурсивно перечислимого, нерекурсивного множества.
11. Тезис Чёрча, вычислимые функции.

VIII. НЕРАЗРЕШИМОСТЬ АРИФМЕТИКИ И ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ

1. Элиминация примитивной рекурсии.
2. Теорема о представимости любой о.р.ф. в арифметике.
3. Гёделевская нумерация формул, её свойства.
4. Линейный вывод в СИПР. Рекурсивная перечислимость множества выводимых секвенций.
5. Аксиоматизируемые теории. Разрешимость полных аксиоматизируемых теорий.
6. Теорема о неразрешимости арифметики натуральных чисел.
7. Теорема Чёрча о неразрешимости ИП.
8. Теорема Гёделя о неполноте.
9. Арифметика Пеано, её неполнота и неразрешимость. Приложение теоремы о неполноте к теории множеств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин. Математическая логика.
2. И.А.Лавров, Л.Л.Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.
3. А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции.