

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*Лектор – проф. Л. Б. Чубаров*

## 4-й семестр

### 1. Математическая технология.

- 1.1. Общие принципы построения математических моделей.
- 1.2. Математический аппарат моделей, основанный на законах сохранения.

### 2. Примеры математических моделей в экологии.

- 2.1. Простейшие модели однородных популяций.
- 2.2. Модель хищник-жертва (модель Вольтерра).
- 2.3. Общая модель хищник-жертва (модель Колмогорова).
- 2.4. Сообщества  $n$  видов. Вольтерровские модели и балансовые уравнения экологии.

### 3. Математическое моделирование в задачах поддержки принятия решений.

- 3.1. Линейная свертка.
- 3.2. Использование контрольных показателей.
- 3.3. Введение метрики в пространстве целевых функций.
- 3.4. Компромиссы Парето.
- 3.5. Численные методы построения множества Парето.

### 4. Аксиоматика сплошной среды.

- 4.1. Аксиома пространства-времени.
- 4.2. Аксиома материального континуума.

### 5. Движение сплошной среды.

- 5.1. Аксиома движения.
- 5.2. Лагранжево и эйлерово описания сплошной среды.
- 5.3. Силовые и энергетические характеристики сплошной среды.
- 5.4. Аксиомы баланса.

### 6. Анализ сил. Аксиома внутренних поверхностных сил.

- 6.1. Аксиома сил и моментов.
- 6.2. Аксиома потока тепла.
- 6.3. Аксиома передачи энергии.

## 6.4. Интегральные законы сохранения.

### 7 Математическое отступление.

#### 7.1. Векторные пространства.

- 7.1.1. Скалярные произведения и нормы.
- 7.1.2. Базисы и кобазисы.
- 7.1.3. Немые индексы.
- 7.1.4. Ковариантные и контравариантные компоненты.
- 7.1.5. Векторное произведение.

#### 7.2. Линейные отображения.

- 7.2.1. Пространство линейных отображений.
- 7.2.2. Изометрия нормированных пространств.
- 7.2.3. Матрица линейного отображения.
- 7.2.4. След матрицы и линейного отображения.
- 7.2.5. Инварианты матриц и линейных отображений.
- 7.2.6. Сопряженные, самосопряженные (симметричные), антисимметричные и ортогональные отображения.
- 7.2.7. Свертка отображений.

#### 7.3. Тензоры.

- 7.3.1. Определения. Примеры.
- 7.3.2. Изоморфизм  $T^2(R^m) \cong L(R^m)$ .

#### 7.4. Скалярные, векторные и тензорные поля.

- 7.4.1. Непрерывные поля.
- 7.4.2. Дифференцируемые поля.
- 7.4.3. Производные по направлению и частные производные.
- 7.4.4. Матрица Якоби.
- 7.4.5. Дивергенция векторного поля.
- 7.4.6. Дивергенция тензорного поля.
- 7.4.7. Формулы Гаусса-Остроградского
- 7.4.8. Оператор Лапласа.

### 8. Дифференциальные законы сохранения-2.

- 8.1. Области определения и соглашения о гладкости.
- 8.2. Общая схема преобразования интегральных законов.
- 8.3. Полная производная.
- 8.4. Перестановка дифференцирования и интегрирования.
- 8.5. Уравнение неразрывности.
- 8.6. Основная теорема механики сплошной среды.
- 8.7. Закон сохранения импульса. Закон сохранения момента импульса.
- 8.8. Теорема о симметричности тензора напряжений.

- 8.9. Теорема о существовании вектора потока тепла.
- 8.10. Тензор скоростей деформации.
- 8.11. Уравнение притока тепла.
- 8.12. Дифференциальная модель.
- 8.13. Замыкание математической модели сплошной среды.

### **9. Термодинамика сплошной среды.**

- 9.1. Термодинамические эффекты в сплошных средах.
- 9.2. Параметры состояния. Количество теплоты. Абсолютная температура и энтропия.
- 9.3. Первое начало термодинамики.
- 9.4. Второе начало термодинамики.
- 9.5. Аксиома термодинамики.
- 9.6. Термодинамические процессы.
- 9.7. Аксиома локального равновесия.
- 9.8. Неравенство Клаузиуса-Дюгема.
- 9.9. Аксиома Фурье.

### **10. Определяющие уравнения. Деформация сплошной среды.**

- 10.1. Тензор деформации Лагранжа. Тензор деформации Эйлера. Тензор скоростей деформации.
- 10.2. Определяющие уравнения (уравнения состояния).
- 10.3. Принцип причинности.
- 10.4. Принцип пространственной локализации.
- 10.5. Системы отсчета. Принцип независимости от системы отсчета.
- 10.6. Теорема об индифферентности основных тензоров.
- 10.7. Пример: жидкости и газы.
- 10.8. Пример: упругие тела.
- 10.9. Пример: определяющее уравнение для вектора потока тепла.

### **11. Изотропные функции.**

- 11.1. Лемма о представлении симметричных функций на  $R^2$ .
- 11.2. Лемма о представлении симметричных функций на  $R^3$ .
- 11.3. Теорема о представлении изотропных тензорных функций.
- 11.4. Теорема о представлении изотропных скалярных функций.
- 11.5. Теорема о представлении изотропных векторных функций.
- 11.6. Еще раз о законе Фурье.

### **12. Модели жидкостей.**

- 12.1. Основное уравнение состояния. Однородность уравнения состоя-

ния.

12.2. Аксиома идеальности. Представление уравнения состояния.

12.3. Аксиома термодинамического состояния.

12.4. Первая замкнутая модель жидкости. Аксиома линейности.

12.5. Классическая модель жидкости. Несжимаемая жидкость. Идеальная жидкость.

### **Темы семинарских занятий**

**1. Технологическая цепочка вычислительного эксперимента как средства решения сложных прикладных задач.**

1.1. Пример реализации технологии математического моделирования для решения простой задачи механики.

**2. Построение математической модели популяции микроорганизмов с учетом различных сопутствующих эффектов.**

2.1. Исследование динамики численности таких популяций с использованием построенных моделей.

**3. Основные методы построения математических моделей движения сплошных сред.**

3.1. Лагранжев и эйлеров подходы к описанию динамики сплошных сред.

**4. Стационарные и нестационарные процессы. Понятия траекторий частиц и линий тока.**

**5. Введения базиса и кобазиса. Ковариантные и контравариантные компоненты тензоров первого и второго рангов.**

**6. Лагранжев и эйлеров тензоры деформаций.**

### **Библиографический список основной литературы**

1. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. М: Наука, 1978.
2. Жермен П. Курс механики сплошных сред. М: Высшая школа', 1983.

### **Библиографический список дополнительной литературы**

1. Овсянников Л.В. Введение в механику сплошной среды: Учебное пособие для студентов НГУ. Новосибирск, ч. 1, 1976; ч. 2, 1977.
2. Р. Р. Ахмеров, Г. С. Хакимянов, Л. Б. Чубаров Математическое моделирование. Основной курс для студентов ММФ НГУ, 4-й семестр. Курс лекций, материалы к семинарским занятиям. / <http://www.ict.nsk.su/lab2.3/ru/stuff/listMM.htm>