

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

3 семестр

## 13. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Повторение начальных сведений по многим переменным

13.1. *Линейная структура в  $\mathbb{R}^n$ .  $\mathbb{R}^n$  как векторное пространство. Линейные преобразования из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^m$ . Нормы в  $\mathbb{R}^n$ . Евклидова структура в  $\mathbb{R}^n$ . Нормы линейных отображений.*

13.2. *Дифференциал функций многих переменных. Дифференцируемость и дифференциал функции в точке. Дифференциал и частные производные. Координатное представление дифференциала. Матрица Якоби. Непрерывность, частные производные и дифференцируемость функции в точке. Достаточные условия дифференцируемости.*

13.3. *Основные законы дифференцирования. Линейность операции дифференцирования. Дифференцирование суперпозиции дифференцируемых отображений.*

13.4. *Однородные функции. Определение. Теорема Эйлера.*

13.5. *Теорема о конечных приращениях.*

13.6. *Второй дифференциал и его свойства. Симметричность второго дифференциала. Симметричности вторых смешанных производных.*

13.7. *Второй дифференциал и его свойства. Симметричность второго дифференциала. Симметричности вторых смешанных производных.*

*Дифференциалы произвольного порядка.*

13.8. *Дифференциалы произвольного порядка. Определение свойство симметричности. Мультииндексные обозначения. Координатное представление дифференциалов высших порядков.*

13.9. *Формула Тейлора для функций многих переменных. Формула Тейлора для функции с остаточным членом в форме Пеано. Формула Тейлора в координатах. Асимптотическая характеристика полинома Тейлора. Формула Тейлора для полиномов  $n$  переменных.*

13.10. *Техника вычисления производных высших порядков. Отображения класса  $C^r$  и их свойства. Полиномы Тейлора суммы и произведения двух отображений класса  $C^r$  (формула Лейбница). Приложения.*

13.11. *Экстремумы. Необходимые и достаточные условия экстремума функции во внутренней точке области определения.*

13.12. *Теорема об обратной функции и ее приложения. Теорема об обратной функции. Теорема о дифференциальных свойствах обратного отображения. Понятие диффеоморфизма класса для открытых множеств в  $\mathbb{R}^n$ . Понятие криволинейной системы координат в пространстве.*

13.11. *Теорема о неявных функциях. Теорема о выпрямляющем диффеоморфизме.*

13.12. *Теорема о ранге. Понятие функциональной зависимости системы функций. Необходимые условия зависимости, достаточные условия.*

## 14. ОСНОВЫ ГЛАДКОГО АНАЛИЗА

14.1. *Дифференцируемые многообразия в пространстве  $\mathbb{R}^n$* . Определение. Локальная система координат и параметризация, функция перехода для двух локальных параметризаций.

14.2. *Строение множества, определяемого невырожденной системой уравнений в пространстве  $\mathbb{R}^n$* . Строение множества, определяемого системой уравнений. Примеры.

14.3. *Касательное пространство*. Определение. Координатное представление.

14.4. *Нормальное пространство*. Понятие градиента. Базис нормального пространства к многообразию, задаваемому системой уравнений.

14.5. *Условные экстремумы*. Необходимое условие экстремума. Принцип множителей Лагранжа. Достаточное условие экстремума.

## 15. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

15.1. *Подготовительные сведения*. Понятие дробящейся системы. Примеры (система  $S^k$   $k$ -мерных сегментов в  $\mathbb{R}^n$ ). Лемма о дроблении. Понятие меры на дробящейся системе и понятие множества с мерой. Пространство ступенчатых функций. Интегрирование ступенчатых функций. Свойства элементарного интеграла. Принцип исчерпывания. Примеры счетно-аддитивных мер. Элементарная теорема Бешпо Леви для ступенчатых функций. Элементарная теорема Фубини для ступенчатых функций.

15.2. *Определение интеграла Лебега*. Понятие интегральной оценки (внешнего интеграла). Свойства. Понятие интеграла Лебега. Свойства интеграла. Пространство  $L_1(\mathbb{X}; \mathbb{E})$  суммируемых функций. Пренебрежимые множества и функции. Их свойства. Термин “почти всюду его свойства”.

15.3. *Теоремы о предельном переходе для последовательностей интегрируемых функций*. Теорема о нормально сходящихся рядах. Следствия (теорема Бешпо Леви, теорема Ф. Рисса о полноте). Лемма о верхней огибающей последовательности интегрируемых функций. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Контрпримеры. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана в пространстве  $\mathbb{R}^k$ . Критерий интегрируемости по Риману в  $\mathbb{R}^k$ .

15.4. *Измеримые функции*. Операции над измеримыми функциями. Теорема об измеримости почти всюду непрерывной функции. Понятие срезки. Лемма о срезке. Признак интегрируемости Лебега. Следствия. Теорема об измеримости предела последовательности измеримых функций. Определение и свойства интеграла неотрицательной измеримой функции. Лемма Фату. Понятия меры и измеримого множества. Совокупность измеримых множеств как  $\sigma$ -кольцо. Измеримость множеств Лебега измеримой функции. Характеризация измеримой функции через множества Лебега.

15.5. *Теоремы Фубини и Тонелли*. Контрпримеры. Лемма о повторной норме. Формула Кавальери — Лебега.

15.6. *Формула замены переменных в кратном интеграле*.

1. Свойство регулярности меры Лебега. Борелевские множества их связь с измеримыми множествами. Поведение меры Лебега относительно изометрических и

подобных преобразований. Искажение меры Лебега при линейных невырожденных преобразованиях.

2. Лемма о  $\mathcal{N}$ -свойстве гладкого отображения. Лемма о локальном искажении меры при гладких гомеоморфизмах. Теоремы о замене переменной в интеграле Лебега.

3. Объем шара в  $\mathbb{R}^n$ . Интегрирование особенностей вида  $|x|^m$  в  $\mathbb{R}^n$  в окрестности 0 и  $\infty$ .

15.7. *Понятие интеграла, зависящего от параметра.* Теоремы о предельном переходе по параметру, непрерывности по параметру, дифференцируемости по параметру (правило Лейбница), интегрируемости по параметру

15.8. *Гамма и бета функции Эйлера.* Область определения, формулы понижения, формула Эйлера — Гаусса, формула дополнения, связь между эйлеровыми функциями. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

## 16. РЯДЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

16.1. *Понятие бесконечного произведения.* Определение сходимости бесконечного произведения. Признаки сходимости. Формула Валлиса.

## 17. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

17.1. *Понятие равномерной интегрируемости семейства функций.* Критерий Коши — Больцано равномерной интегрируемости, мажорантный признак, признаки Дирихле и Абеля.

17.2. *Общие теоремы о предельном переходе под знаком интеграла и о непрерывности функций, представимых интегралами, зависящими от параметра.* Теоремы о дифференцировании и интегрировании интегралов по параметру.

## 18. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

18.1. *Пространства  $L_\infty(A, X)$  и  $C(A, X)$ .* Понятие равномерно сходящейся последовательности. Полнота пространства  $L_\infty$ . Теорема Дини.

18.2. *Теорема Арцела.*

18.3. *Понятие равномерной сходимости для функциональных рядов.* Критерий Коши — Больцано равномерной сходимости ряда. Мажорантный признак равномерной сходимости. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функционального ряда.

18.4. *Равномерно сходящиеся последовательности интегрируемых функций.* Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании функциональных рядов.

## 4 семестр

18. *Понятие о методе Лапласа для нахождения асимптотики представлений некоторых интегралов.* Принцип локализации. Теорема об асимптотическом поведении. Примеры.

Формула Стирлинга.

## 19. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

19.1. *Меры Хаусдорфа.* Определение внешней меры. Примеры. Определение измеримости по Каратеодори. Связь с измеримостью по Лебегу. Свойства измеримых подмножеств. Признак измеримости Каратеодори для удаленных множеств. Критерий Каратеодори измеримости борелевских множеств в метрическом пространстве. Теорема об исчерпывании борелевских множеств. Меры Хаусдорфа. Свойства меры Хаусдорфа. Теорема о регулярности меры Хаусдорфа. Размерность по Хаусдорфу. Изодиаметрическое неравенство. Связь между мерами Хаусдорфа и Лебега. Теорема Бине — Коши.

19.2. *Интегрирование на  $k$ -мерных поверхностях.* Лемма о локальном искажении меры (определитель Грама как элемент площади поверхности). Лемма об образе множества вырождения. Формула площади. Интегрирование на  $k$ -мерных поверхностях. Сведение интеграла по мере Хаусдорфа к интегралу по мере Лебега. Интеграл Лебега в полярной системе координат. Длина кривой, площадь графика функции. Мера на многообразии. Площадь поверхности вращения. Формула коплощади.

19.3.  *$\Delta$ -образные последовательности.* Понятие свертки и ее свойства. Определение  $\Delta$ -образной последовательности. Примеры. Лемма о равномерном приближении. Аппроксимационная теорема Вейерштрасса. Равномерное приближение непрерывной функции тригонометрическими многочленами.

19.4. *Теорема об аппроксимации единицы.* Теорема о непрерывности сдвига в  $L_1(\mathbb{R}^k)$ . Теорема об аппроксимации единицы. Средние по Стеклову и Соболеву (свертка функций с ядром Соболева или Стеклова). Гладкость средних функций с гладким ядром. Теорема о плотности  $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$  в  $L_1(\mathbb{R}^k)$ .

## 20. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

20.1. *Внешние дифференциальные формы первой степени.* Понятие интеграла от формы первой степени вдоль гладкого пути. Примеры. Условие независимости интеграла от выбора пути, соединяющего данные точки. Примеры. Координатное представление. Операция переноса, ее свойства. Интегрирование форм первой степени. Свойства интеграла. Формула Ньютона — Лейбница. Формула Грина.

20.2. *Понятие внешней дифференциальной формы степени  $r \geq 0$  на открытом множестве пространства  $\mathbb{R}^n$ .* Примеры и их различные интерпретации, форма Гаусса. Операции над дифференциальными формами. Координатное представление внешних форм. Внешнее произведение дифференциальных форм и его свойства.

20.3. *Понятие дифференциала внешней формы.* Внешний дифференциал и его свойства. Первая теорема Пуанкаре.

20.4. *Гладкие отображения открытых множеств пространства  $\mathbb{R}^n$  и индуцированные ими преобразования внешних форм.* Свойства операции переноса.

20.5. *Понятие ориентации  $k$ -мерного многообразия в  $\mathbb{R}^n$ .* Индуцированная ориентация края. Критерий ориентируемости дифференцируемого многообразия. Примеры.

20.7. *Интегрирование  $k$ -форм по  $k$ -мерным сингулярным цепям.* Определение  $k$ -мерного куска многообразия. Свойства.  $k$ -мерная цепь. Граница куба как  $k$ -мерная цепь. Граница цепи. Интегрирование по  $k$ -мерной цепи. Формула Стокса — Пуанкаре.

20.8. *Понятие интеграла внешней формы по ориентированному дифференцируемому многообразию.* Лемма о разбиении единицы. Определение интеграла. Корректность определения. Признак интегрируемости. Свойства интеграла.

20.9. *Обобщенная интегральная теорема Стокса.*

20.10. *Векторные поля и дифференциальные формы.* Основные понятия векторного анализа.

20.11. *Точные и замкнутые формы.* Понятие звездной области. Лемма Пуанкаре. Применения. Интеграл от формы Гаусса. Теорема о пленке. Теорема Брауэра о неподвижной точке.

## 21. РЯДЫ ФУРЬЕ.

21.1. *Определение ряда Фурье.* Определение ортогональных систем. Примеры. Коэффициенты Фурье относительно ортогональной системы в гильбертовом пространстве. Тождество и неравенство Бесселя. Полные ортонормированные системы в гильбертовом пространстве. Полнота тригонометрической системы в  $L_2[-\pi, \pi]$ . Теорема о полноте пространства  $L_2$ . Теорема о разложении элемента гильбертова пространства по полной ортонормированной системе. Равенство Парсеваля.

21.2. *Поточечная сходимость ряда Фурье.* Лемма Римана — Лебега. Ядро Дирихле, его свойства. Принцип локализации. Условие Дини. Примеры. Достаточное условие сходимости ряда в точке. Примеры. Формула  $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ . Изопериметрическое свойство круга.

21.3. *Преобразование Фурье.* Определение преобразования Фурье и интеграла Фурье. Свойства преобразования Фурье. Преобразование Фурье и свертка. Примеры. Инъективность преобразования Фурье. Достаточные условия представимости функции ее интегралом Фурье. Гладкость функции и скорость убывания ее преобразования Фурье. Пространство быстроубывающих функций (свойства). Формула обращения. Равенство Парсеваля. Преобразование Фурье и решение дифференциальных уравнений.

21.4. *Полнота пространства  $L_p$ .* Непрерывность в среднем: для функции  $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$  верно

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx \rightarrow 0, \quad \text{если } h \rightarrow 0.$$

### Рекомендуемая литература

- [В] Водопьянов С. К. *Интеграл Лебега*. Электронные записки лекций.
- [З] Зорич В. А. *Математический анализ*. Т. 1–2. М.: Наука, 1981.
- [Д] Дьедонне Ж. *Современный анализ*. М.: Мир, 1964.
- [Н] Никольский С. М. *Курс математического анализа*. М.: Наука, 1975.
- [Р] Решетняк Ю. Г. *Курс математического анализа*. Новосибирск: Изд-во Института математики, Ч. 1, 1999; Ч. 2, 2000.
- [Ру] Рудин У. *Основы математического анализа*. М.: Мир, 1976.
- [С] Спивак М. *Математический анализ на многообразиях*. М.: Мир, 1971.
- [Ф] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1–3. М.: Наука, 1969.
- [Ш1] Шварц Л. *Анализ*. Т. 1–2. М., Мир, 1972
- [Ш2] Шведов И. А. *Учебные пособия и методические указания по математическому анализу для студентов НГУ, изданные в разные годы Новосибирским государственным университетом (см. каталог в библиотеке НГУ)*.

### Литература, рекомендуемая для работы на семинарах

- 1) Водопьянов С.К. Исангулова Д. В. *Исчисление внешних дифференциальных форм. Сборник задач и упражнений. Учебное пособие*. — Новосибирск, Изд-во НГУ, 2012.
- 2) Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе*. — М.: Мир, 1967.
- 3) Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. — М.: Наука, 1977.
- 4) Кудрявцев Л. Д. и др. *Сборник задач по математическому анализу*. — Санкт-Петербург: Кристалл, 1994.
- 5) Решетняк Ю. Г. *Сборник задач по курсу математического анализа*. — Новосибирск: изд. НГУ, 1979.

Программу составил профессор

С. К. Водопьянов

17 мая 2012 года