МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Лектор – проф. В. С. Белоносов

3-й семестр

1. Теорема о неявных функциях и ее приложения

1.1. Частные производные высоких порядков. Условия равенства смешанных производных.

1.2. Дифференциалы высоких порядков. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

1.3. Экстремумы функций нескольких переменных.

1.4. Гомеоморфизм и диффеоморфизм. Теорема об обратном отображении (о локальном диффеоморфизме). Теорема о неявных функциях. Примеры.

1.5. Определение гладкого многообразия. Явный, неявный и параметрический способы описания многообразий. Примеры. Теорема об эквивалентности гладких параметризаций.

1.6. Касательное пространство и способы его описания. Условные экстремумы. Обоснование метода множителей Лагранжа.

2. Ряды и интегралы, зависящие от параметров

2.1. Равномерная сходимость для функций нескольких переменных, функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле.

2.2. Теорема о перестановке предельных переходов. Непрерывность предельной функции. Теорема Дини.

2.3. Предельный переход под знаком суммы ряда. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость рядов с параметрами.

2.4. Степенные ряды. Радиус и характер сходимости степенных рядов. Дифференцируемость и интегрируемость степенных рядов. Понятие аналитической функции. Примеры.

2.5. Предельный переход под знаком собственного интеграла. Непрерывность и дифференцируемость собственных интегралов с параметрами. Перестановка собственных интегрирований.

2.6. Равномерная сходимость несобственных интегралов с параметрами. Критерий Коши. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле.

2.7. Предельный переход под знаком несобственного интеграла. Непрерывность и дифференцируемость несобственных интегралов с параметрами. Перестановка несобственных интегрирований.

3. Ряды Фурье и преобразование Фурье

3.1. Ряд Фурье периодической функции. Формулы для частичной суммы и остатка ряда Фурье. Интеграл Дирихле.

3.2. Лемма об осцилляции. Стремление к нулю коэффициентов ряда Фурье. Связь между дифференцируемостью функции и скоростью убывания ее коэффициентов Фурье. Принцип локализации.

3.3. Признаки Дини и Липшица сходимости ряда Фурье. Равномерная сходимость. Поведение суммы ряда в точках разрыва исходной функции.

3.4. Разложения четных и нечетных функций. Разложения только по синусам и только по косинусам.

3.5. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими или алгебраическими многочленами.

3.6. Интеграл Фурье и сходимость к порождающей его функции. Условия Дини и Липшица.

3.7. Преобразование Фурье. Формула обращения. Связь с дифференцированием и сверткой.

4. Теория меры

4.1. Задача о придании точного смысла интуитивным представлениям о площади и объеме; обзор некоторых возможных подходов к ее решению.

4.2. Элементарные множества в R^n и их свойства. Мера элементарных множеств; ее аддитивность, субтрактивность и счетная полуаддитивность.

4.3. Внешняя мера и ее свойства.

4.4. Мера Лебега. Необходимые и достаточные условия измеримости. Объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Счетная аддитивность и непрерывность меры Лебега.

4.5. Измеримость открытых и замкнутых множеств в R^n . Пример неизмеримого множества.

4.6. Определение меры Жордана и ее сравнение с мерой Лебега.

4-й семестр

5. Кратные интегралы

5.1. Измеримые функции. Их аппроксимация ступенчатыми. Измеримость суммы, произведения, предела последовательности измеримых функций.

5.2. Сходимость почти всюду. Теорема Егорова.

5.3. Физические и механические задачи, приводящие к понятию интеграла. Два подхода к определению интеграла – при помощи сумм Римана и сумм Лебега.

5.4. Определение и простейшие свойства интеграла Лебега по множеству конечной меры.

5.5. Счетная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла.

5.6. Теоремы Лебега, Леви и Фату о предельном переходе под знаком интеграла. Интеграл по множеству бесконечной меры.

5.7. Сравнение интегралов Римана и Лебега.

5.8. Геометрический смысл интеграла. Теорема Фубини. Вычисление объема n-мерного шара.

5.9. Разбиение единицы. Формула замены переменных в интеграле от непрерывной функции по открытому множеству.

5.10. Вычисление меры образа измеримого множества при диффеоморфизме. Инвариантность меры относительно движений пространства.

5.11. Теорема о замене переменных в общем случае.

6. Интегрирование на многообразиях

6.1. Формула k-мерного объема k-мерного параллелепипеда в R^n.

6.2. Измеримые куски гладких k-мерных многообразий в R^n и формулы для вычисления их k-мерных объемов. Инвариантность формул относительно замены параметров. Интеграл первого рода по измеримому куску k-мерного многообразия.

6.3. Общее определение k-мерного объема и интеграла первого рода по k-мерному многообразию в R^n. Простейшие свойства объемов и интегралов.

6.4. Вычисление внешней нормали к (n - 1)-мерной поверхности, ограничивающей область в R^n .

6.5. Формула интегрирования по частям для интегралов по областям в R^n.

6.6. Формулы Грина и Остроградского.

6.7. Ориентированные поверхности в R^3 и поверхностный интеграл второго рода.

6.8. Поверхность с краем. Индуцированная ориентация края. Формула Стокса. Ротор векторного поля.

6.9. Потенциальные векторные поля. Независимость криволинейного интеграла от пути – условие потенциальности векторного поля. Теорема Пуанкаре.

Библиографический список

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1969. Т. 1–3.

2. Никольский С. М. Курс математического анализа. М.: Наука, 1975. Т. 1–2.

3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

Программа практических занятий

3-й семестр

1. Формула Тейлора [1, № 3585–88, 3590, 3593–3600].
2. Экстремумы [1, № 3624, 3627–28, 3633, 3639, 3643].
3. Непрерывные отображения [2, № 576–578, 584–587, 592–593, 595–597].
4. Сжимающие отображения. Обратные отображения [2, № 607–608, 610–611; 1, 3369–3370].
5. Дифференцирование обратных отображений [1, № 1034–37, 3407–10, 3414–15].
6. Неявные функции [1, № 3371, 3374, 3379, 3383–85, 3389, 3401–04].

7–8. Замена переменных [1, № 3431, 3433, 3436, 3440, 3447, 3450, 3460, 3462, 3465, 3470, 3471, 3474, 3476].

9–10. Условные экстремумы [1, № 3655, 3657.1, 3659, 3661, 3663, 3663.16 3667–71].

11. *Контрольная работа*.
12. Равномерная сходимость последовательностей [1, № 2746–48, 2751, 2754, 2756, 2760–62].
13. Равномерная сходимость рядов. Признак Вейерштрасса [1, № 2744, 2745, 2767–69, 2771, 2772, 2774, 2788–91].
14. Признаки равномерной сходимости Абеля и Дирихле. Непрерывность суммы ряда [1, № 2775–78, 2780–81, 2783, 2792–97].

15. Дифференцирование и интегрирование рядов [1, № 2796–2805, 2809–10].

16. Радиус сходимости степенного ряда. Разложение аналитических функций в степенные ряды [1, № 2813, 2816, 2825, 2828, 2829, 2851–62].

17. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов [1, № 2869–72, 2906, 2908, 2911, 2913, 2932].

18. Собственные интегралы с параметром [1, № 3713, 3718, 3732–35, 3737–38].

19. Равномерная сходимость несобственных интегралов. Признак Вейерштрасса [1, № 3751, 3754–55.3, 3757, 3759, 3760.1, 3762–63, 3766–67, 3769].

20. Признаки Дирихле и Абеля [1, № 3756, 3758, 3760, 3761, 3764–65, 3768].

21. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов с параметрами [1, № 3793–3800].

22. Интегралы Пуассона и Дирихле [1, № 3803,3805, 3807–09, 3813].

23. Эйлеровы интегралы [1, № 3843, 3845, 3847, 3848, 3852, 3854, 3856, 3860].

24. *Контрольная работа.*

25–26. Ряды Фурье [1, № 2938–51, 2963, 2974–85].

27–28. Преобразование Фурье [1, № 3881, 3885, 3887, 3896–3900].

29–31. Мера Лебега [2, № 407, 416, 420, 422, 423–425, 427–430, 434–436, 441, 446–448].

32. *Зачет.*

4-й семестр

1. Измеримые функции [2, № 679–683, 685, 689, 691, 692, 693].

2. Сходимость почти всюду и сходимость по мере [2, № 696, 697, 699–701].

3. Понятие интеграла Лебега и его сравнение с интегралом Римана [2, № 713, 714, 717, 723, 731, 732, 735].

4–6. Формулировка теоремы Фубини и ее применение [1, № 3916–33, 3924–30, 3932–36, 4076–83, 4202–03, 4214–15].

7–9. Замена переменных в кратном интеграле [1, № 3943–47, 3956–61, 4087–92, 4204–4212].

10–11. Интегралы от неограниченных функций и по множествам бесконечной меры [1, № 4161–65, 4168–74, 4181–85, 4191–93, 4196–98].

12. Приложения кратных интегралов [1, № 4107–4110, 4112–14, 4116, 4120].

13. *Контрольная работа*.

14. Криволинейный интеграл первого рода [1, № 4221, 4223, 4225, 4228, 4233, 4234, 4237–40].

15. Криволинейный интеграл второго рода [1, № 4250–57, 4279–83].

16–17. Двухмерная поверхность. Площадь поверхности [1, № 3540, 3543, 3546, 3548–51, 3555, 3560, 4036–4045].

18. Поверхностный интеграл первого рода [1, № 4342–50, 4352–55, 4358, 4360, 4361].

19. Ориентация поверхности. Поверхностный интеграл второго рода [1, № 4362–66].

20–22. Формулы Грина, Остроградского, Стокса [1, № 4298, 4299, 4303, 4307, 4309–13, 4323–25, 4367–74, 4376, 4377, 4381–85, 4387–90, 4392].

23. *Контрольная работа*.

24. Полные дифференциалы. Теорема Пуанкаре [1, № 4263–64, 4267, 4272–73, 4284–86, 4290–92].

25–26. Элементы теории поля [1, № 4408, 4410, 4419, 4421, 4422, 4425, 4426, 4436, 4441, 4443, 4452.4, 4454, 4457].

27. Резерв.

28. *Зачет.*

Библиографический список литературы для работы на семинарах

1. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1972.

2. Очан Ю. С. Сборник задач по математическому анализу: общая теория множеств и функций. М.: Просвещение, 1981.