

### Вариант Мг.08.3.1

1. А) Пусть  $\vec{u}$  - скорость,  $p$  - давление,  $\rho$  - плотность,  $2\vec{\Omega}$  - планетарный вихрь.

Следствием каких законов механики является уравнение изменения циркуляции

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C 2\vec{\Omega} \times \vec{u} \cdot d\vec{r} - \oint_C \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} ?$$

В) Пусть выполнено баротропное уравнение состояния, т. е.  $p = p(\rho)$ . Доказать, что условие  $d\Gamma/dt = 0$  выполняется для любого замкнутого контура  $C$  тогда и только тогда, когда  $\vec{\Omega} = 0$ .

2. А) Дать определение обобщенной производной  $\partial u / \partial x_i$  в смысле Соболева в

$L^2(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . В) На интервале  $(-1,1)$  заданы функции

$$u(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}, \quad v(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Доказать, что  $v$  является обобщенной производной функции  $u$ .

3. А) Дать определение производной Олдройда тензора напряжений Коши  $P(x,t)$ .

В) Почему в определяющих уравнениях нельзя использовать материальную производную тензора  $P(x,t)$ ?

4. Дать определение обобщенного решения внутренней стационарной задачи для уравнений Навье-Стокса.

5. А) На примере задачи  $u_t + au_x = 0$ ,  $u(x,0) = u_0(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 < t < T$ ,  $a = const$

дать определения монотонной конечно-разностной схемы и схемы с невозрастающей полной вариацией (TVD - схемы). В) Доказать, что монотонная схема удовлетворяет условию TVD.

#### Задачи

1. На интервале  $\{-1 < x < 1\} = \Omega$  рассматривается краевая задача  $u_{xx} = 0$ ,  $u|_{|x|=1} = 0$ .

Доказать, что функция  $u(x) = |x| - 1$  не является обобщенным решением в пространстве Соболева  $W_2^1(\Omega)$ .

2. Доказать, что материальная производная тензора напряжений Коши  $P(x,t)$  не является объективной, т. е. зависит от системы отсчёта.

3. Движение вязкой несжимаемой жидкости стационарно и плоскопараллельно, поле массовых сил потенциально. Кроме того,  $\omega = const$ , где  $\omega$  - ненулевая компонента вектора вихря  $\text{rot } \vec{v}$ . Вывести уравнение, которому удовлетворяет функция тока.

4. В геострофическом приближении для модели геофизической гидродинамики несжимаемой жидкости выполняются уравнения  $\text{div } \vec{u} = 0$ ,  $fu = \partial p / \partial y$  и  $fv = -\partial p / \partial x$ , где  $p$  - давление,  $f$  - постоянный параметр Кориолиса,  $(u, v, w)$  - компоненты вектора скорости  $\vec{u}$  в прямоугольной декартовой системе координат. Доказать, что равенство  $w = 0$  выполняется на любой поверхности  $z = const$ , если  $w = 0$  при  $z = 0$ .

5. Для численного решения задачи

$$u_t + au_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < T, \quad a = const \quad (1)$$

рассмотрим явную схему

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad \Delta t = t^{n+1} - t^n = const, \quad \Delta x = x_i - x_{i-1} = const, \quad u_i^0 = u_0(x_i).$$

При каком соотношении шагов разностной сетки схема позволяет получить точное решение задачи (1) (при отсутствии ошибок округления)? Является ли схема монотонной? Почему для решения задачи (1) нельзя использовать схему с направленными разностями вперед?