

## Вариант П2.Т1 - теория

1. Привести формулировку теоремы Вейерштрасса о существовании решения задачи минимизации в случае рефлексивных пространств.
2. Что такое  $\Gamma$ -регуляризации функции?
3. Распределения Шварца и функции с обобщенными производными по Соболеву (определения).
4. Сформулировать теорему о непрерывности в целом функций пространств Лебега.
5. Теорема солидарности для возвратных состояний цепи Маркова.
6. Дифференцирование процессов в  $L^2$ .
7. Дать определение корректной, некорректной и условно-корректной задачи математической физики.
8. Дать определение модуля непрерывности обратного оператора.
9. Дать определение констант энергетической эквивалентности симметричных операторов  $A$  и  $B$ .
10. Сформулировать теорему о необходимом и достаточном условии сходимости стационарного двухслойного неявного итерационного метода

$$B \frac{x^{m+1} - x^m}{\tau} + Ax^m = b,$$

применяемого для решения системы линейных алгебраических уравнений  $Ax = b$ .

## Вариант П2.Т2 - теория

1. Привести формулировку теоремы Вейерштрасса о существовании решения задачи минимизации в случае нерексивных пространств.
2. Что такое полунепрерывная снизу регуляризации функции?
3. Сформулировать теорему о регуляризации распределений.
4. Сформулировать теорему вложения Соболева для пространств  $W_p^l(U)$  в случае  $lp > n$ .
5. Процессы рождения и гибели. Примеры таких процессов.
6. Интеграл Римана для случайных процессов в  $L^2$ .
7. Сформулировать теорему Тихонова о непрерывности взаимнооднозначного оператора.
8. Дать определение квазирешения.
9. Выписать функционал ошибки для системы линейных алгебраических уравнений  $Ax = b$ .
10. Пусть известны константы энергетической эквивалентности  $\gamma_1, \gamma_2$  симметричных, положительно определенных операторов  $A$  и  $B$ . Указать достаточные условия на параметр  $\tau$ , обеспечивающие сходимость стационарного двухслойного неявного итерационного метода

$$B \frac{x^{m+1} - x^m}{\tau} + Ax^m = b,$$

применяемого для решения системы линейных алгебраических уравнений  $Ax = b$ .

### Вариант П2.31 - задачи

1. Пусть  $\Omega \subset R^n$  – ограниченная область с гладкой границей  $\Gamma$ ,  $\nu$  – внешняя нормаль к  $\Gamma$ ,  $g \in L^2(\Omega)$ . Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta u + u = g \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Привести вариационную формулировку этой задачи, т.е. сформулировать как задачу минимизации.

2. Доказать, что  $C(U)$  не является плотным подмножеством в  $L_\infty(U)$ .

3. Пусть  $\xi(t)$  – пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$ . Вычислить

$$E(\xi(3) - \xi(1))(\xi(4) - \xi(2))(\xi(5) - \xi(3)).$$

4. Доказать некорректность операции дифференцирования.

5. Каково число итераций  $m$ , которое в явном методе скорейшего спуска, применяемом для получения решения  $x$  системы линейных алгебраических уравнений  $Ax = b$  с

матрицей  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ , гарантирует выполнение неравенства

$$\|x^m - x\|_A \leq 10^{-6} \|x^0 - x\|_A?$$

### Вариант П2.32 - задачи

1. Пусть  $\Omega \subset R^n$  – ограниченная область с гладкой границей  $\Gamma$ ,  $\nu$  – внешняя нормаль к  $\Gamma$ ,  $g \in L^2(\Omega)$ ;  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ . Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta u = g \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1.$$

Привести вариационную формулировку этой задачи, т.е. сформулировать как задачу минимизации.

2. Доказать, что для любых  $l = 1, 2, \dots$  и  $p \geq 1$   $W_p^l(U) \subset D'(U)$

3. Пусть  $w(t)$  – стандартный винеровский процесс. Докажите, что  $w(t) - w(t-1)$ ,  $t \geq 1$ , – стационарный в узком смысле процесс.

4. Корректна ли сплайн-интерполяция? Обосновать.

5. Каково число итераций  $m$ , которое в явном методе минимальных невязок, применяемом для получения решения  $x$  системы линейных алгебраических уравнений

$Ax = b$  с матрицей  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ , гарантирует выполнение неравенства

$$\|x^m - x\|_2 \leq 10^{-6} \|x^0 - x\|_2?$$