

Программа курса  
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА**  
для студентов 1-2 курсов  
Механико-математического факультета  
Новосибирского государственного университета

## I. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. Секвенциальное исчисление высказываний. Вывод в исчислении. Теорема о подстановке.
2. Таблицы истинности. Теорема о корректности для исчисления ИС.
3. Допустимые правила вывода. Примеры.
4. Синтаксическая эквивалентность формул логики высказываний. Теоремы о замене. Вывод основных эквивалентностей.
5. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.
6. Теорема о полноте исчисления ИС.
7. Совершенные нормальные формы.
8. Функционально полные системы связок.

## II. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Операции над множествами. Теоретико-множественные тождества.
2. Упорядоченная пара. Декартово произведение множеств. Отношения и функции.
3. Отношения эквивалентности, предпорядка, частичного и линейного порядков.
4. Основные свойства вполне упорядоченных множеств. Теорема о сравнении вполне упорядоченных множеств.
5. Аксиома выбора, лемма Цорна, теорема Цермело.
6. Сравнение множеств по мощности. Теоремы Кантора-Бернштейна и Кантора. Теорема о трихотомии.
7. Сумма и произведение бесконечных кардинальных чисел. Мощность множества слов в бесконечном алфавите.

## III. ЯЗЫК ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ И ЕГО СЕМАНТИКА

1. Предикаты и функции. Алгебраические системы данной сигнатуры.
2. Термы и атомарные формулы. Формулы первого порядка.
3. Определение истинности формул на алгебраической системе. Тождественная истинность и выполнимость.
4. Семантическая эквивалентность формул. Предваренная нормальная форма.

## IV. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

1. Аксиомы и правила вывода секвенциального исчисления предикатов. Вывод в исчислении.
2. Допустимые правила. Леммы о подстановке.
3. Тождественная истинность доказуемых секвенций.
4. Непротиворечивые множества формул и их свойства.
5. Полные множества формул. Лемма Линденбаума.
6. Теорема о существовании модели.
7. Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов.

8. Исчисление предикатов с равенством. Теорема о существовании модели. Теорема о полноте.
9. Теорема Мальцева о компактности. Теорема о расширении. Теорема Левенгейма-Скулема.
10. Теорема Эрбрана.
11. Исчисления гильбертовского типа. Теорема о дедукции для исчисления высказываний ИВ.
12. Вывод в исчислениях предикатов ИП и ИПР. Теорема о дедукции. Сведение ИПР к ИП.
13. Эквивалентность секвенциального и гильбертовского исчислений.
14. Сильная теорема о полноте для ИП и ИПР.
15. Аксиоматизируемые классы. Критерий конечной аксиоматизируемости.

## V. АЛГОРИТМЫ И РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Понятие алгоритма. Машина Тьюринга.
2. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга.
3. Операторы суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Частично-рекурсивные функции.
4. Нумерация пар и кортежей натуральных чисел. Функция Геделя.
5. Нумерация машин Тьюринга.
6. Равнообъемность класса частично-рекурсивных функций и класса вычислимых функций. Тезис Черча.
7. Существование универсальной частично рекурсивной функции. Теорема о нормальной форме Клини
8. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества. Теорема Поста.
9. Существование нерекурсивного, рекурсивно перечислимого множества.
10. Теорема о графике и ее следствия.
11. Основная теорема о рекурсивно перечислимых множествах.
12.  $m$ -сводимость. Существование  $m$ -универсального множества.

## VI. ТЕОРЕМА ГЕДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ АРИФМЕТИКИ

1. Геделевская нумерация и ее свойства.
2. Рекурсивная перечислимость множества теорем ИПР
3. Формальная теория арифметики.
4. Представимость рекурсивных функций.
5. Теорема Геделя о неразрешимости арифметики.
6. Теорема Черча о неразрешимости исчисления предикатов.
7. Рекурсивно аксиоматизируемые, полные и разрешимые теории.
8. Теорема Геделя о неполноте арифметики.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.Л.Ершов, Е.А.Палютин. Математическая логика.
2. И.А.Лавров, Л.Л.Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.
3. А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции.

Профессор, д.ф.-м.н.

Л.Л.Максимова