

Рассмотрим систему из n нелинейных уравнений, содержащую скалярный параметр q :

$$f_i(x_1, \dots, x_n, q) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где $f_i(x_1, \dots, x_n, q)$, $i = 1, 2, \dots, n$, - достаточно гладкие функции по совокупности аргументов в области их определения. Считая, что x - вектор с компонентами x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, а f - вектор с компонентами f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, запишем систему (1) в виде векторного уравнения:

$$f(x, q) = 0. \quad (2)$$

Основу численных методов исследования систем нелинейных уравнений составляет теорема о неявной функции. Приведем без доказательства формулировку теоремы применительно к системе (2).

Теорема о неявной функции. Пусть дана система (2), где $f(x, q)$ - вектор-функция векторного аргумента x и скалярного аргумента q , непрерывно дифференцируемая в $(n+1)$ -мерном параллелепипеде с центром в точке (x^0, q^0) , в которой вектор-функция $f(x, q)$ обращается в 0: $f(x^0, q^0) = 0$. Если при этом матрица производных $f_x(x^0, q^0)$ не вырождена, то существует окрестность точки (x^0, q^0) , где система (2) определяет однозначную непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $x = x(q)$ принимающую значение x^0 при $q = q^0$.

Обозначим через D матрицу производных

$$D = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial f}{\partial q} \right] = [f_x, f_q].$$

Если в окрестности решения (2)

$$\text{rank}(D) = n, \quad (3)$$

то тогда по теореме о неявной функции решение $x = x(q)$ системы нелинейных уравнений (2) будет представлено в пространстве $[x, q]$ гладкой пространственной кривой S .

Отметим, что при выполнении условия (3) все аргументы вектор-функции $f(x, q)$, т.е. компоненты векторного аргумента x и q становятся равноправными.

Перепишем систему (1) к виду

$$f_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где

$$x_{n+1} = q. \quad (5)$$

Введем обозначения:

$$i=1, 2, \dots, n+1, \quad i \neq k.$$

$$X_k - \text{вектор с компонентами } x_i, \quad (6)$$

$$P_{X_k} - \text{матрица производных со столбцами } \partial f / \partial x_i$$

Равноправие аргументов проявляется в следующем. Пусть точка $\sigma^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0)$ принадлежит кривой S, т.е.

$$f_i(x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Если в этой точке выполнено условие

$$\det(P_{X_k}) \neq 0, \quad (7)$$

то по теореме о неявной функции можно считать, что в окрестности σ^0 система (4) определяет дифференцируемое решение

$$X_k = X_k(x_k), \quad X_k = X_k^0 \text{ при } x_k = x_k^0, \quad (8)$$

т.е. x_k в окрестности σ^0 играет роль параметра системы (4). Отмечая это обстоятельство, будем записывать (4) в виде, аналогичном (2):

$$f(X_k, x_k) = 0. \quad (9)$$

Пусть $X_k = X_k(x_k)$ - решение (9), т.е. $f(X_k(x_k), x_k) \equiv 0$. Дифференцированием тождества по параметру x_k получим систему линейных алгебраических уравнений относительно производных решения (9) по параметру x_k :

$$P_{X_k}(X_k(x_k), x_k) \frac{dX_k}{dx_k}(x_k) = - \frac{\partial f}{\partial x_k}(X_k(x_k), x_k). \quad (10)$$

Обратим внимание на то, что матрица системы (10) становится известной после завершения итераций по методу Ньютона, который применялся для решения системы (9).

В силу (7), (10) вектор-функцию $X_k = X_k(x_k)$ можно рассматривать также как решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений не разрешенных относительно производных:

$$P_{X_k} \frac{dX_k}{dx_k} = -\frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad X_k = X_k^0 \text{ при } x_k = x_k^0. \quad (11)$$

Используя формулы Крамера, представим (11) в виде:

$$i=1,2,\dots,n+1, i \neq k, \\ \frac{dx_i}{dx_k} = \frac{\Delta_i}{\Delta_k}, \quad x_i = x_i^0 \text{ при } x_k = x_k^0. \quad (12)$$

Здесь $\Delta_k = \det(P_{X_k})$, Δ_i - определители матриц P_{X_k} , в которых i -ый столбец заменен на вектор правых частей $-\partial f / \partial x_k$. Поэтому

$$|\Delta_j| = |\det(P_{X_j})|, \quad j=1,2,\dots,n+1. \quad (13)$$

Так как $\Delta_k \neq 0$, то можно утверждать, что система (4), где x_k - параметр, определяет S , как интегральную кривую системы дифференциальных уравнений (11), проходящей через точку σ^0 .

Пусть, в частности,

$$\Delta_{n+1} = \det(f_x) = \Delta \neq 0.$$

При этом задача Коши (12), где $k = n+1$, с учетом (5) принимает вид:

$$i=1,2,\dots,n, \\ \frac{dx_i}{dq} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad x_i = x_i^0 \text{ при } q = q^0. \quad (14)$$

В тех точках интегральной кривой (14), в которых $\Delta=0$ при $q = q^*$, графики функций $x_i = x_i(q)$ имеют вертикальную касательную. Таким образом, по отношению к (14) условие $\Delta=0$ определяет особую точку типа «поворот», в которой происходит бифуркация числа (изменение числа решений).

Возможно, что в некоторых точках кривой S ранг матрицы D окажется меньше n . Такие точки называются существенно особыми. Предлагаемый метод продолжения решения по параметру позволяет численно построить дугу гладкой пространственной кривой S между двумя особыми точками, если особые точки имеют место.

Приведем описание одного регулярного шага построения кривой S в окрестности точки $\sigma^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0)$ методом продолжением по параметру решения системы (4) с использованием так называемой «параметризации». При этом

предполагается, что роль параметра в (4) играет компонента x_k , а система линейных алгебраических уравнений

$$P_{X_k} \frac{dX_k}{dx_k} = -\frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad \det(P_{X_k}) \neq 0,$$

определяет в точке σ^0 вектор производных dX_k/dx_k .

Параметризацией называется правило выбора компоненты $\mu = x_j$, в точке σ^0 кривой S , которая в качестве параметра системы (4) используется для продолжения решения (4) на один шаг в окрестности σ^0 . При этом производные решения (4) по параметру μ в точке σ^0 определяются нормировкой компонент вектора производных dX_k/dx_k . Так как параметр μ выбирается на один шаг, то он называется «текущим параметром».

В связи с выбором текущего параметра μ компоненты вектора производных dX_k/dx_k подвергаются нормировке. Для этого определяется максимальная по модулю компонента. Пусть

$$\omega = \left| \frac{dx_j}{dx_k} \right| = \max_i \left| \frac{dx_i}{dx_k} \right|, \quad i=1,2,\dots,n+1, \quad i \neq k.$$

Тогда, как следует из (12) с учетом (13), имеем

$$\left| \frac{dx_j}{dx_k} \right| = \left| \frac{\det(P_{X_j})}{\det(P_{X_k})} \right|,$$

т.е.

$$\left| \det(P_{X_j}) \right| \geq \left| \det(P_{X_k}) \right| > 0, \quad \text{если } \omega \geq 1. \quad (15)$$

Так как при выполнении условия (15) $\left| \det(P_{X_j}) \right| > 0$, то в окрестности точки σ^0 компонента x_j также может быть параметром системы (4). В этом случае система (4) определяет дифференцируемое решение

$$X_j = X_j(x_j), \quad X_j = X_j^0 \quad \text{при } x_j = x_j^0.$$

Если выполнено условие (15), то производные решения по параметру x_j в точке σ^0 находятся нормировкой производных по x_k :

$$\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{dx_i}{dx_k} / \frac{dx_j}{dx_k}, \quad i=1,2,\dots,n+1, \quad i \neq j. \quad (16)$$

При этом модули компонент (16) вектора производных по x_j ограничены единицей. Если условие (15) не выполняется, то нормировка не производится, так как в этом случае модули компонент вектора производных dX_k/dx_k и так ограничены единицей. Параметром системы (4) остается x_k . Таким образом, выбор параметра μ в точке σ^0 происходит по правилу:

$$\mu = \begin{cases} x_j, & \omega \geq 1, \\ x_k, & \omega < 1, \end{cases} \quad (17)$$

где ω определено в (10). Для производных решения по параметру μ соответственно имеем:

$$i=1,2,\dots,n+1, \quad \frac{dx_i}{d\mu} = \frac{dx_i}{dx_k} / \frac{d\mu}{dx_k}, \quad \text{если } \omega \geq 1,$$

$$\frac{dx_i}{d\mu} = \frac{dx_i}{dx_k}, \quad \text{если } \omega < 1.$$

(Здесь содержится тривиальное выражение: $d\mu/d\mu=1$.)

Смысл проделанных преобразований состоит в том, что, зная решение и производную решения по текущему параметру, можно использовать их для задания начального приближения решения системы (4) в достаточно малой окрестности точки σ^0 . Кроме того, по непрерывности модули компонент вектора производных по текущему параметру будут мало отличаться от 1 в достаточно малой окрестности точки σ^0 .

Воспользуемся обозначениями, аналогичными (6). Пусть m – индекс текущего параметра μ , определенного при параметризации в точке σ^0 согласно (17), где $\mu = \mu^0$. При этом

$$X_\mu - \text{вектор с компонентами } x_i, \quad i=1,2,\dots,n+1, \quad i \neq m,$$

который является (по аналогии с (9)), решение системы

$$f(X_\mu, \mu) = 0.$$

Если $\mu = \mu^0$, то в этих обозначениях вектор X_μ с компонентами x_i^0 , $i=1,2,\dots,n+1, i \neq m$, будет решением системы

$$f(X_\mu, \mu^0) = 0.$$

Обозначим, далее, через h_μ шаг по текущему параметру μ . Тогда, например, формулы

$$x_i = x_i^0 + \left(\frac{dx_i}{d\mu}\right)_{\mu=\mu^0} h_\mu, \quad i=1,2,\dots,n+1. \quad (18)$$

могут быть использованы в методе Ньютона для задания начального приближения решения системы:

$$f(X_\mu, \mu^0 + h_\mu) = 0. \quad (19)$$

Величина шага h_μ по параметру μ в формулах (18),(19) может варьироваться в зависимости от результатов сходимости итераций по Ньютону при решении системы (19). Первоначально h_μ присваивается значение пробного шага h_μ^0 и по формулам (18) вычисляется начальное приближение решения (19). Если при этом число итераций достигает ограничения, но норма невязок на итерациях все еще больше заданного числа, то шаг h_μ делится пополам и снова задается начальное приближение (18). Вычисления прекращаются, если величина шага становится меньше допустимого. В противном случае считается, что итерационный процесс сошелся, т.е. получено решение (19) и, следовательно, становятся известными координаты точки $\sigma^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1, x_{n+1}^1)$, где $x_m^1 = \mu^1 = \mu^0 + h_\mu$, соседней с точкой σ^0 . Продолжение решения (4) на один шаг из точки σ^0 в точку σ^1 завершено.

В точке σ^1 выполняются те же действия, что и в точке σ^0 . А именно. Применением параметризации определяется текущий параметр λ , значение которого при $q = x_{n+1}^1$ равно $\lambda^1 = x_l^1$. Это означает, что найдено решение системы

$$f(X_\lambda, \lambda) = 0 \text{ при } \lambda = \lambda_1,$$

а также вектор производных решения по параметру λ в точке σ^1 , модули компонент которого ограничены единицей. В результате появляется возможность задания начального приближения решения системы

$$f(X_\lambda, \lambda_1 + h_\lambda) = 0,$$

где h_λ – пробный шаг по текущему параметру λ , и т.д.

Замечание. Если точка σ^0 – начало кривой S (стартовая позиция), то начальное приближение берется в виде (18), где пробный шаг задается.

Если точка σ^0 отвечает текущей позиции, то пробный шаг h_λ в точке σ^1 при задании начального приближения решения системы

$$f(X_\lambda, \lambda_1 + h_\lambda) = 0$$

берется равным $c(x_i^1 - x_i^0)$, где $c > 1$ – «параметр разгона».

Отметим, что в текущей позиции начальное приближение может задаваться в виде кубической параболы с привлечением производных решения по λ при $\lambda = \lambda^1 = x_i^1$ и $\lambda = \lambda^0 = x_i^0$. Для вычисления производных при $\lambda = \lambda^0$ достаточно разделить производные решения по параметру μ при $\mu = \mu^0$ на производную $dx_i/d\mu$. При этом начальное приближение имеет вид:

$$t = 1 + \frac{h_\lambda}{h_\lambda^0}, \quad h_\lambda^0 = \lambda^1 - \lambda^0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n + 1,$$

$$x_i = x_i^0(1-t) + x_i^1 t + t \left(-t \sum (a_i(1-t) + b_i t) \right),$$

где

$$a_i = h_\lambda^0 \left(\frac{dx_i}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda^0} + x_i^0 - x_i^1,$$

$$b_i = -h_\lambda^0 \left(\frac{dx_i}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda^1} - x_i^0 + x_i^1.$$

Процесс построения кривой S завершается на границе задаваемой области изменения параметра q . В результате имеем таблицу значений x_i , $i = 1, 2, \dots, n + 1$, используя которую можно построить зависимость компонент вектора X_k от x_k , где k – любой столбец этой таблицы, в том числе и $(n+1)$, содержащий значения параметра q . График зависимости $x = x(q)$ является итогом численного исследования системы (2).

Иллюстрационный пример построения гладкой пространственной кривой S для системы

$$6 \leq q \leq 10,$$

$$3x_1 - x_2 - 4 = 0, \quad 4 \sin(x_1 - 2) - q + 10 = 0.$$

представлен на рис.1, 2. Графики проекций S указывают на существование множественности решений рассматриваемой системы уравнений.

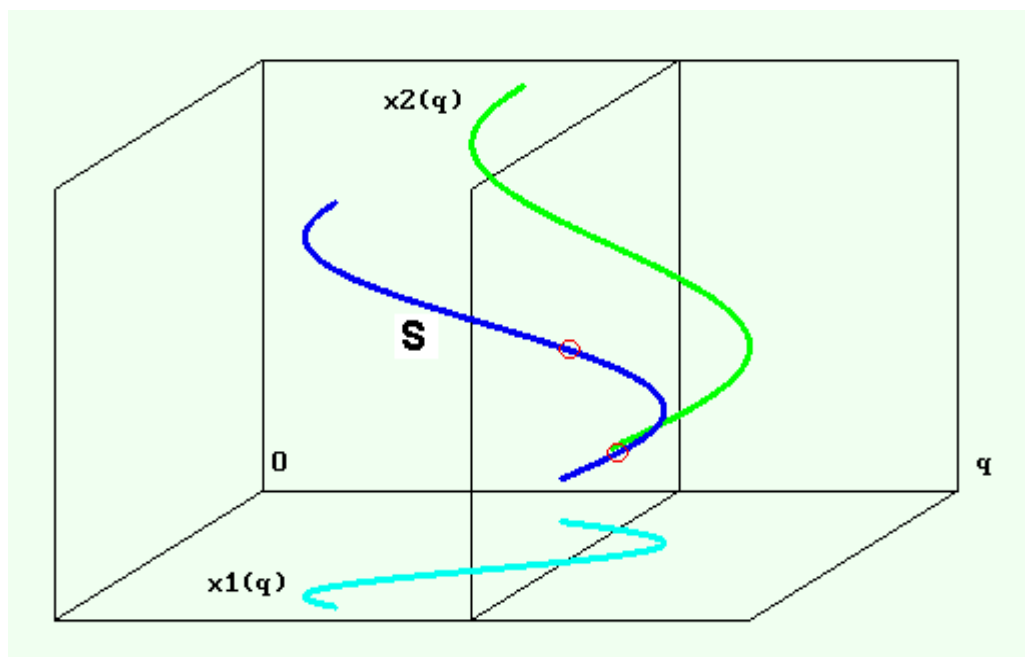


РИС.1. Пример гладкой пространственной кривой S , которая представляет решение системы из 2-х уравнений с параметром q :

$$6 \leq q \leq 10, \quad 3x_1 - x_2 - 4 = 0, \quad 4 \sin(x_1 - 2) - q + 10 = 0.$$

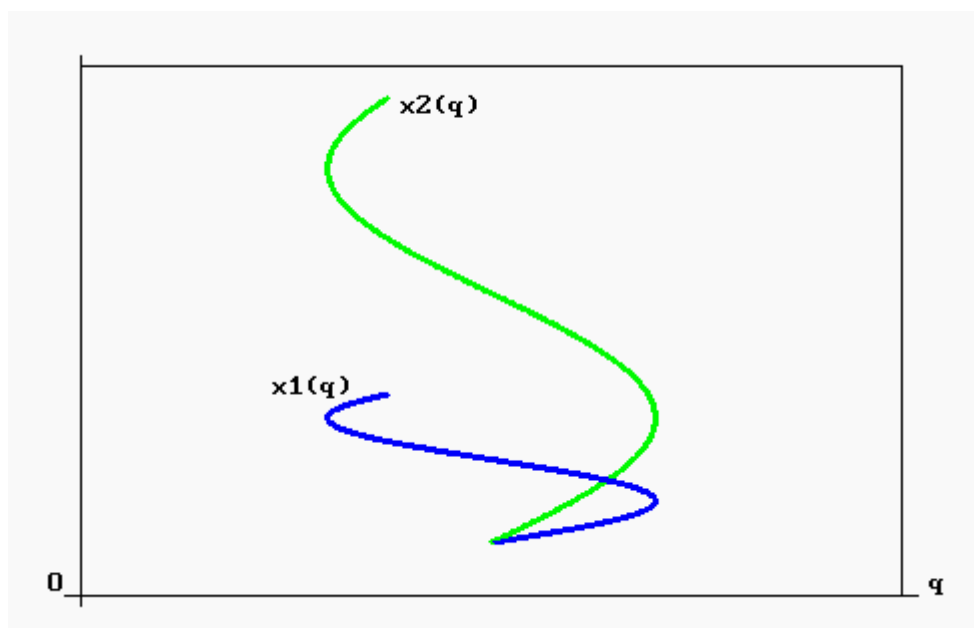


РИС.2 Диаграмма множественности решений в виде графиков компонент $x_1 = x_1(q)$ и $x_2 = x_2(q)$.

Применение метода продолжения решения по параметру носит характер численного эксперимента, в котором присутствует ряд вычислительных проблем, требующих индивидуального подхода в зависимости от конкретного вида каждой из рассматриваемых нелинейных систем уравнений (как и при численном исследовании нелинейных проблем вообще). Отметим некоторые из них.

1. Задание начального приближения в методе Ньютона в стартовой позиции.
2. Определение области изменения параметра q системы. Вообще говоря, если известно решение системы при некотором значении параметра $q = q^0$, то можно лишь утверждать, что по непрерывности решение существует лишь в некоторой окрестности q^0 , размеры которой заранее неизвестны и устанавливаются в ходе численного эксперимента.
3. Подбор параметров метода продолжения решения (параметры метода Ньютона, параметры адаптации текущих шагов), от которых может зависеть вид численно построенной пространственной кривой S . Отметим, что в процессе продолжения находится последовательность точек, принадлежащих графику. Поэтому для правильного представления графика, необходимо согласование параметров метода с гладкостью S .

Метод продолжения решения по параметру является инструментом численного исследования, результаты которого тем достовернее, чем полнее априорные представления о свойствах изучаемой системы нелинейной системы.

Тема 2. Продолжение решения по параметру, как задача Коши.

Остановимся на варианте продолжения решения системы нелинейных уравнений

$$f(x, q) = 0,$$

в котором проблема формулируется как задача Коши (14):

$$\frac{dx_i}{d\alpha} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{n+1}}, \quad x_i = x_i^0 \text{ при } q = q^0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь

$$\Delta_j = \det(P_{X_j}), \quad j=1,2,\dots,n+1, \quad \Delta_{n+1} \neq 0 \text{ при } q=q^0,$$

$$X_k - \text{вектор с компонентами } x_i, \quad i=1,2,\dots,x_{n+1}, \quad i \neq k, \quad x_{n+1} = q,$$

$$P_{X_k} - \text{матрица со столбцами } \partial f / \partial x_i, \quad i=1,2,\dots,n+1, \quad i \neq k,$$

$$\sigma^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n+1}^k) - k\text{-я точка интегральной кривой.}$$

Требуется построить интегральную кривую, проходящую через точку σ^0 . Предполагается, что известны формулы метода численного интегрирования на один шаг и что для интегрирования выбран метод с автоматическим выбором шага.

Пусть $\mu = x_j$ - текущий параметр в точке σ^k , где $\mu = x_j^k$. При этом для выбора текущего параметра применялась параметризация. В результате использования формул интегрирования на один шаг по μ задачи Коши

$$\frac{dx_i}{d\mu} = \frac{\Delta_i}{\Delta_j}, \quad x_i = x_i^k \text{ при } \mu = x_j^k, \quad i=1,2,\dots,n+1, \quad i \neq j,$$

становится известной точка σ^{k+1} , где применением параметризации выбирается текущий параметр $\lambda = x_i$. И так далее.

Пусть $i = 1, 2, \dots, n+1$, где $x_{n+1} = q$, - известное решение (1) при некотором значении параметра q , а $\mu = x_k$ - текущий параметр. Тогда можно считать, что это решение является результатом интегрирования на один шаг системы обыкновенных дифференциальных уравнений с независимым аргументом μ :

$$P_{X_k} \frac{dX_k}{d\mu} = - \frac{\partial f_k}{\partial \mu}, \quad \frac{dx_k}{d\mu} = 1,$$

где X_k - вектор с компонентами $x_i, i=1,2,\dots,x_{n+1}, i \neq k$; P_{X_k} - матрица производных со столбцами $\partial f / \partial x_i, i=1,2,\dots,x_{n+1}, i \neq k$. Поскольку производные решения по параметру μ известны, то это дает возможность применением параметризации определить новый текущий параметр $x_j = \tau$. При этом построение интегральной кривой на один шаг осуществляется интегрированием системы дифференциальных уравнений

$$P_{X_j} \frac{dX_j}{d\tau} = -\frac{\partial f_j}{\partial \tau}, \quad \frac{dx_j}{d\tau} = 1,$$

где X_j – вектор с компонентами $x_j, i=1,2,\dots,x_{n+1}, i \neq j$; P_{X_j} – матрица производных со столбцами $\partial f / \partial x_i, i=1,2,\dots,x_{n+1}, i \neq j$. И т.д.

Тема 3. Метод Кубичека.

В методе Кубичека параметром для продолжения решения системы нелинейных уравнений (2) является длина дуги s гладкой пространственной кривой S . Очевидно, в параметрическом представлении решения (2) в виде $x = x(s), q = q(s)$ имеет место однозначная зависимость x и q от s .

Пусть $(x(s), q(s))$ – произвольная точка S ,

$$f(x(s), q(s)) = 0, \quad (20)$$

Дифференцированием (20) по s получим:

$$f_x \frac{dx}{ds} + f_q \frac{dq}{ds} = 0,$$

или

$$[f_x, f_q] \begin{bmatrix} dx / ds \\ dq / ds \end{bmatrix} = 0, \quad (21)$$

где $[f_x, f_q]$ – $n \times (n+1)$ – матрица, ранг которой равен n . Дополним систему уравнений (12) выражением элемента длины дуги:

$$ds = \pm \sqrt{dq^2 + \|dx\|^2}. \quad (22)$$

В стартовой точке продолжения выполняются условия:

$$x = x^0, \quad q = q^0 \quad \text{при} \quad s = 0. \quad (23)$$

Воспользуемся методом Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице для преобразования (21) к виду:

$$[B, b] \begin{bmatrix} du / ds \\ d\mu / ds \end{bmatrix} = 0, \quad (24)$$

где B – верхняя треугольная матрица, b – преобразованный k -ый столбец матрицы $[f_x, f_q]$, компоненты вектора (u, μ) образуются из компонент вектора (x, q) в результате перестановок, связанных с методом Гаусса.

Из (24) следует система линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей B относительно производных компонент вектора u по параметру μ

$$B \frac{du}{d\mu} = -b. \quad (25)$$

Поскольку $\det B \neq 0$, то $\mu = x_k$ играет роль текущего параметра. При этом элемент дуги записывается в виде:

$$ds = \pm d\mu \sqrt{1 + \|du / d\mu\|^2}. \quad (26)$$

Выбор знака согласуется с условием возрастания длины дуги.

Из тождества

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{d\mu} \frac{d\mu}{ds},$$

а также уравнений (25),(26) следуют равенства, которые можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений относительно $u = u(s)$ и $\mu = \mu(s)$. Имеем:

$$\frac{du}{ds} = \pm \frac{du / d\mu}{\sqrt{1 + \|du / d\mu\|^2}}, \quad \frac{d\mu}{ds} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \|du / d\mu\|^2}}. \quad (27)$$

Для вычисления правых частей (27) необходимо найти решение системы линейных алгебраических уравнений (28) с верхней треугольной матрицей B . Напомним, что соответствие между компонентами векторов $(x(s), q(s))$ и $(u(s), \mu(s))$ устанавливается перестановками метода Гаусса. Начальные условия следуют из (28). Тем самым задача продолжения решения системы (2) по длине дуги пространственной кривой S сведена к задаче Коши для системы (27) с независимым аргументом s .

Приведем схему вычислений по методу Кубичека.

1. Предполагается, что известен способ решения системы нелинейных уравнений (2) при $q = q^0$:

$$f(x^0, q^0) = 0.$$

2. При $q = q^0$ вычисляются элементы матрицы производных

$$G = [f_x, f_q].$$

3. Матрица G применением метода Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице преобразуется к матрице $Q = [B, b]$.

В ходе преобразования запоминаются перестановки столбцов матрицы G . При этом столбец с номером k матрицы G занимает положение столбца b матрицы Q , а $\mu = x_k$ становится текущим параметром. Элементы вектора (x, q) после перестановок становятся элементами вектора (u, μ) .

4. Решается система линейных уравнений

$$Bz = -b$$

с верхней треугольной матрицей B относительно $z = du/d\mu$.

5. Вычисляются правые части системы дифференциальных уравнений (27):

$$\frac{du}{ds} = \pm \frac{z}{\sqrt{1 + \|z\|^2}}, \quad \frac{d\mu}{ds} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \|z\|^2}}.$$

Знак правых частей согласуется с условием возрастания длины дуги,

$$ds = \pm d\mu \sqrt{1 + \|z\|^2},$$

с учетом знака приращения текущего параметра.

6. Выполняется шаг интегрирования, при котором находится решение (27) (u^1, μ^1) по формулам выбранного метода интегрирования. С использованием известных перестановок восстанавливаются элементы вектора (x^1, q^1)

7. При $q = q^1$ вычисляются элементы матрицы производных

$$G = [f_x, f_q]$$

8. Выполняется пункт 3 и т.д.

Сделаем ряд замечаний к методу Кубичека. В методах продолжения решения системы нелинейных уравнений по параметру, сформулированных как задача Коши, указывается способ вычисления правых частей системы дифференциальных уравнений, что формально позволяет использовать одну из стандартных программ интегрирования для численного построения решения $x = x(q)$ системы нелинейных уравнений (2). Однако, возможны случаи, когда система дифференциальных уравнений оказывается жесткой. Возникающие в связи с этим вычислительные проблемы (например, применение явного метода интегрирования из-за сложности вычисления производных правых частей) обусловлены только выбором метода решения (2).

Раздел 4.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ.

Тема 1. Продолжение решения по параметру в методе множественной стрельбы.

Рассмотрим нелинейную краевую задачу для системы из n дифференциальных уравнений:

$$x \in [a, b], \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, q), \quad g(y(a), y(b), q) = 0, \quad (1)$$

где y , f и g – векторы с компонентами y_k , f_k и g_k , $k = 1, 2, \dots, n$, соответственно, q – скалярный параметр. Вектор-функции $f(x, y, q)$ и $g(y(a), y(b), q)$ предполагаются достаточно гладкими по совокупности их аргументов. Предполагается, что краевая задача (1) хорошо обусловлена и имеет решение $y = y(x, q)$, дифференцируемое как по x , так и по $\alpha = y(a)$, $\beta = y(b)$.

По определению также хорошо обусловленной будет краевая задача относительно производной решения (1) по параметру q , которую обозначим как вектор-функцию $v(x)$:

$$v(x) = \frac{\partial y}{\partial q}(x, q).$$

Подставим в (1) решение $y = y(x, q)$. После дифференцирования полученных тождеств по q приходим к выводу, что $v(x)$ является решением линейной краевой задачи:

$$x \in [a, b], \quad \frac{dv}{dx} = A(x)v + R(x), \quad Sv(a) + Tv(b) = \phi, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} A(x) &= f_y(x, y(x, q), q), \quad R(x) = f_q(x, y(x, q), q), \\ \phi &= -g_q(y(a, q), y(b, q), q), \end{aligned} \quad (3)$$

$$S = g_\alpha(y(a, q), y(b, q), q), \quad T = g_\beta(y(a, q), y(b, q), q),$$

Для удобства здесь использованы обозначения: $\alpha = y(a, q)$, $\beta = y(b, q)$.

Совместное решение краевых задач (1) и (2) позволяет реализовать продолжение решения (1) на основе метода множественной стрельбы.

Напомним (раздел 2, тема 3), что метод множественной стрельбы применительно к нелинейной краевой задаче

$$x \in [a, b], \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad g(y(a), y(b)) = 0, \quad (4)$$

сводится к заданию сетки,

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_m < x_{m+1} = b, \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad (5)$$

и решению методом Ньютона системы нелинейных уравнений $\Psi(P) = 0$ относительно сеточных значений искомой вектор-функции $y(x)$. Вектор-функция $\Psi(P)$ и матрица производных $\Psi_P(P)$ определяются в ходе итераций на решениях известной серии задач Коши.

Очевидно, в случае (1) аналогичная система нелинейных уравнений относительно сеточных значений решения $y = y(x, q)$ будет иметь вид:

$$\Psi(P, q) = 0. \quad (6)$$

Предполагается, что в некоторой области изменения параметра q система (4) определяет зависимость $P = P(q)$, которая в пространстве (P, q) имеет представление в виде гладкой пространственной кривой Σ .

Пусть $\det(\Psi_P) \neq 0$ в некоторой точке кривой Σ . Тогда производная решения (6) по параметру находится из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\Psi_P(P(q), q) \frac{dP}{dq} = -\Psi_q(P(q), q). \quad (7)$$

Отметим, что матрица Ψ_P вычисляется на итерациях по Ньютону при решении системы (6).

Как известно (раздел 3), применение к системе (6) метода продолжения по параметру для построения кривой Σ , а вместе с этим и решения краевой задачи (1) в зависимости от параметра, требует вычисления матрицы производных

$$\Omega = [\Psi_P, \Psi_q] \quad (8)$$

Приведем формулировку серии задач Коши, связанную с вычислением матрицы Ω .

Как и в методе множественной стрельбы для решения краевой задачи (4), сформулируем серию задач Коши, которая с учетом краевых условий (1) определяет вектор-функцию $\Psi(P, q)$ и матричную функцию $\Psi_P(P, q)$. Имеем:

$$x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k=1,2,\dots,m,$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, q), \quad y = p^{[k]} \quad \text{при } x = x_k. \quad (9)$$

$$\frac{dY}{dx} = f_y(x, y, q)Y, \quad Y = I \quad \text{при } x = x_k.$$

где p^k , $k = 1, 2, \dots, m+1$, - векторная компонента вектора P .

Пусть $y = y(x, p^{[k]}, q)$ и $Y = Y(x, p^{[k]}, q)$ – решения (9) на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$. При этом из условий непрерывности решения краевой задачи (1) и краевых условий следуют формулы для вычисления векторных компонент $\psi^{[j]}$, $j = 0, 1, \dots, m$, вектора Ψ :

$$\begin{aligned} \psi^{[0]} &= g(p^{[1]}, p^{[2]}, q), \\ \psi^{[k]} &= y(x_{k+1}, p^{[k]}, q) - p^{[k]}, \quad k=1,2,\dots,m. \end{aligned} \quad (10)$$

Матрица производных $\Psi_p(P, q)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \Psi_p(P, q) &= \quad (11) \\ &= \begin{bmatrix} g_{p^{[1]}}(p^{[1]}, p^{[m+1]}, q) & \dots & g_{p^{[m+1]}}(p^{[1]}, p^{[m+1]}, q) \\ Y(x_2, p^{[1]}, q) & -I & \dots \\ & Y(x_3, p^{[2]}, q) & -I & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & Y(x_{m+1}, p^{[m]}, q) & -I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Определим теперь вектор-столбец Ψ_q матрицы Ω . С этой целью воспользуемся методом множественной стрельбы для численного решения линейной краевой задачи (2). Введем обозначения для сеточных значений вектор-функции $v(x)$:

$$\eta^{[k]} = v(x_k) = \frac{\partial y}{\partial q}(x_k, q), \quad k=1,2,\dots,m+1.$$

При этом вектор $\eta^{[k]}$ является векторной компонентой составного вектора dP/dq , определяемого из системы линейных алгебраических уравнений (7). В соответствии с методом множественной стрельбы (раздел 2, тема 1) рассматривается серия задач Коши:

$$x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k=1,2,\dots,m,$$

$$\frac{dw}{dx} = A(x)w + R(x), \quad w=0 \text{ при } x=x_k, \quad (12)$$

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y, \quad Y(x_j) = I,$$

где учтены обозначения (3). Отметим, что задачи Коши для матрицанта в (9) и (12) одни и те же.

Пусть $w=w(x, p^{[k]}, q)$ и $Y=Y(x, p^{[k]}, q)$ – решения (12) на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$. Тогда решение задачи Коши

$$x \in [x_k, x_{k+1}], \quad \frac{dv}{dx} = A(x)v + R(x), \quad v = \eta^{[k]} \text{ при } x=x_k$$

можно представить в виде:

$$v(x, p^{[k]}, q) = Y(x, p^{[k]}, q)\eta^{[k]} + w(x, p^{[k]}, q).$$

Из условия непрерывности решения (2) в узлах сетки и краевых условий следуют система линейных алгебраических уравнений относительно векторных компонент $\eta^{[k]}, k=0, 1, \dots, m$, вектора dP/dq :

$$S\eta^{[1]} + T\eta^{[m+1]} = \phi,$$

$$k=1,2,\dots,m,$$

$$Y(x_{k+1}, p^{[k]}, q)\eta^{[k]} - \eta^{[k+1]} = -w(x_{k+1}, p^{[k]}, q).$$

Принимая во внимание (3), (11), легко убедиться, что матрицей этой системы является $\Psi_P(P, q)$, а сама система совпадает с (7). Таким образом, в системе линейных алгебраических уравнений

$$\Psi_P(P(q), q) \frac{dP}{dq} = -\Psi_q(P(q), q)$$

составной вектор Ψ_q имеет вид:

$$\Psi_q(P, q) = - \begin{bmatrix} g_q(p^{[1]}, p^{[m+1]}, q) \\ w(x_2, p^{[1]}, q) \\ w(x_3, p^{[3]}, q) \\ \dots \\ w(x_{m+1}, p^{[m]}, q) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Отметим, что выражения (13) уже не связаны с условием $\det(\Psi_P) \neq 0$.

Подведем итог. Обозначим через $(p^{[k]})^j, k=1,2,\dots,m+1$, и $q^j, j=0,1,2,\dots$, приближенные значения координат точки пространственной кривой Σ ,

$$\Gamma^j = ((p^{[1]})^j, (p^{[2]})^j, \dots, (p^{[m+1]})^j, q^j].$$

При этом известно, какая из координат точки Γ^j играет роль текущего параметра. Определение следующего приближения по методу Ньютона с учетом параметризации происходит следующим образом.

Пусть $y = y(x, (p^{[k]})^j, q^j), Y = Y(x, (p^{[k]})^j, q^j), w = w(x, (p^{[k]})^j, q^j)$ – решения задач Коши:

$$x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k=1,2,\dots,m,$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, q^j), \quad y = (p^{[k]})^j \quad \text{при } x = x_k.$$

$$\frac{dY}{dx} = f_y(x, y, q^j)Y, \quad Y = I \quad \text{при } x = x_k.$$

$$\frac{dw}{dx} = f_y(x, y, q^j)w + f_q(x, y, q^j), \quad w = 0 \quad \text{при } x = x_k,$$

Тогда согласно (10),(13) компоненты векторов Ψ и Ψ_q на итерациях определяются по формулам:

$$\Psi(P^j, q^j) = \begin{bmatrix} g((p^{[1]})^j, (p^{[m+1]})^j, q^j) \\ y(x_2, (p^{[1]})^j, q^j) - (p^{[2]})^j \\ y(x_3, (p^{[3]})^j, q^j) - (p^{[4]})^j \\ \dots \\ y(x_{m+1}, (p^{[m]})^j, q^j) - (p^{[m+1]})^j \end{bmatrix}, \quad \Psi_q(P^j, q^j) = - \begin{bmatrix} g_q((p^{[1]})^j, (p^{[m+1]})^j, q^j) \\ w(x_2, (p^{[1]})^j, q^j) \\ w(x_3, (p^{[3]})^j, q^j) \\ \dots \\ w(x_{m+1}, (p^{[m]})^j, q^j) \end{bmatrix}.$$

Матрица Ψ_p на итерациях согласно (11) имеет вид:

$$\Psi_p(P^j, q^j) = \begin{bmatrix} g_{p^{[1]}}((p^{[1]})^j, (p^{[m+1]})^j, q^j) & \dots & g_{p^{[m+1]}}((p^{[1]})^j, (p^{[m+1]})^j, q^j) \\ Y(x_2, (p^{[1]})^j, q^j) & -I & \dots \\ Y(x_3, (p^{[2]})^j, q^j) & -I & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & Y(x_{m+1}, (p^{[m]})^j, q^j) & -I \end{bmatrix}$$

Тем самым на итерациях определяется матрица Ω :

$$\Omega = [\Psi_p(P^j, q^j), \Psi_q(P^j, q^j)].$$

После сходимости итераций по методу Ньютона реализуется последовательность операций метода

продолжения решения по параметру. В результате становится известной зависимость сеточных значений $p^{[k]}$, $k = 1, 2, \dots, m+1$, искомой вектор-функции $y = y(x, q)$ от параметра q . Для вычисления решения в промежуточных точках сетки используются задачи Коши:

$$x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, q), \quad y = p^{[k]} \quad \text{при } x = x_k.$$

В случае, когда система нелинейных уравнений (6) имеет неединственное решение в некоторой области изменения параметра q , тем же свойством обладает краевая задача (1).

Тема 2. Дискретная модель нелинейной краевой задачи, основанная на сплайн-коллокации.

Рассмотрим метод сплайн-коллокации для приближенного представления краевой задачи (1) в виде системы нелинейных уравнений (6) относительно сеточных значений решения (1) в узлах сетки (5). Пусть $y = y(x, q)$ – решение (1). Введем обозначения:

$$x \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$y^{[i]} = y(x_i, q), \quad f^{[i]} = \frac{dy}{dx}(x_i, q) = f(x_i, y^{[i]}, q), \quad (14)$$

$$y^{[i+1]} = y(x_{i+1}, q), \quad f^{[i+1]} = \frac{dy}{dx}(x_{i+1}, q) = f(x_{i+1}, y^{[i+1]}, q)$$

Будем искать приближенное решение краевой задачи в виде эрмитова интерполяционного кубического сплайна $S(x)$ класса C^1 , значения которого на концах отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ сетки (5) совпадают соответственно с $y^{[i]}$ и $y^{[i+1]}$, а его производные, согласно (14), – совпадают с $f^{[i]}$ и $f^{[i+1]}$. При этом сплайн $S(x)$ и его производную на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ можно представить в виде:

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad x = x_i + h_i t, \quad t \in [0, 1],$$

$$S(x) = (1-t)y^{[i]} + ty^{[i+1]} + t(1-t)[(1-t)A^{[i]} + tB^{[i]}], \quad (15)$$

$$h_i \frac{dS}{dx}(x) = y^{[i+1]} - y^{[i]} + (1-2t)[(1-t)A^{[i]} + tB^{[i]}] + t(1-t)(B^{[i]} - A^{[i]})$$

где выражения параметров

$$A^{[i]} = -y^{[i+1]} + y^{[i]} + h_i f^{[i]}, \quad B^{[i]} = y^{[i+1]} - y^{[i]} - h_i f^{[i+1]}, \quad (16)$$

следуют из условий интерполяции для производных:

$$\frac{dS}{dx}(x_i) = f^{[i]}, \quad \frac{dS}{dx}(x_{i+1}) = f^{[i+1]}.$$

Потребуем, чтобы сплайн $S(x)$ удовлетворял дифференциальному уравнению краевой задачи (1) в средних точках каждого из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ (условия коллокации):

$$\bar{x}_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}), \quad \frac{dS}{dx}(\bar{x}_k) = f(\bar{x}_k, S(\bar{x}_k), q), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (17)$$

и краевым условиям:

$$g(S(x_1), S(x_{m+1}), q) = 0. \quad (18)$$

Найдем выражения $S(\bar{x}_k)$ и $\frac{dS}{dx}(\bar{x}_k)$.

Согласно формулам (15), где $t=1/2$, имеем:

$$S(\bar{x}_k) = \frac{1}{2}(y^{[k]} + y^{[k+1]}) + \frac{1}{8}(A^{[k]} + B^{[k]})$$

$$h_k \frac{dS}{dx}(\bar{x}_k) = y^{[k+1]} - y^{[k]} + \frac{1}{4}(B^{[k]} - A^{[k]}).$$

Далее, с учетом (16) получим:

$$S(\bar{x}_k) = \frac{1}{2}(y^{[k]} + y^{[k+1]}) + \frac{h_k}{8}(f^{[k]} - f^{[k+1]})$$

$$\frac{dS}{dx}(\bar{x}_k) = \frac{1}{h_k}(y^{[k+1]} - y^{[k]}) - \frac{1}{2h_k}(y^{[k]} - y^{[k+1]}) - \frac{1}{4}(f^{[k]} + f^{[k+1]}) =$$

$$= \frac{3}{2h_k}(y^{[k+1]} - y^{[k]}) - \frac{1}{4}(f^{[k]} + f^{[k+1]}).$$

Для формулировки дискретной модели краевой задачи (1) осталось подставить в (17), (18) выражения $S(\bar{x}_k)$, $\frac{dS}{dx}(\bar{x}_k)$, а также $S(x_1)$ и $S(x_{m+1})$.

В результате подстановки условия коллокации (17) принимают вид:

$$\frac{3}{2h_k}(y^{[k+1]} - y^{[k]}) - \frac{1}{4}(f^{[k]} + f^{[k+1]}) = \bar{f}_k,$$

где

$$\bar{f}_k = f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, q), \quad \bar{x}_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}), \quad (19)$$

$$\bar{y}_k = S(\bar{x}_k) = \frac{1}{2}(y^{[k]} + y^{[k+1]}) + \frac{h_k}{8}(f^{[k]} - f^{[k+1]}),$$

или

$$y^{[k+1]} - y^{[k]} = \frac{h_k}{6}(f^{[k]} + 4\bar{f}^{[k]} + f^{[k+1]}).$$

С учетом принятых обозначений нелинейная система уравнений, представляющая дискретную модель (1), записывается в виде системы векторных уравнений:

$$\Phi^0 = g(y^{[1]}, y^{[m+1]}, q) = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, m.$$

$$\begin{aligned} \Phi^k = y^{[k]} - y^{[k+1]} + \frac{h_k}{6}[f(x_k, y^{[k]}, q) + 4f(\bar{x}_k^{[k]}, \bar{y}_k, q) + \\ + f(x_{k+1}, y^{[k+1]}, q)] = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

В дальнейшем будем полагать, что векторы $y^{[k]}$, $k=1, 2, \dots, m+1$, являются векторными компонентами вектора Y , а векторы $\Phi^0, \Phi^1, \dots, \Phi^m$, составляют вектор Φ . Таким образом проблема сводится к численному исследованию решения системы нелинейных уравнений:

$$\Phi(Y, q) = 0. \quad (21)$$

Приведем выражения столбцов матрицы производных $[\Phi_Y, \Phi_q]$, используемых при продолжении решения системы (21) по параметру. Согласно формулам (20) имеем:

$$\Phi_Y(Y, q) = \begin{bmatrix} \Phi_{y^{[1]}}^0 & & & & & \Phi_{y^{[m+1]}}^0 \\ \Phi_{y^{[1]}}^1 & \Phi_{y^{[2]}}^1 & & & & \\ & \Phi_{y^{[2]}}^2 & \Phi_{y^{[3]}}^2 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & \Phi_{y^{[m]}}^m & \Phi_{y^{[m+1]}}^m \end{bmatrix}, \quad \Phi_q(Y, q) = \begin{bmatrix} g_q \\ \Phi_q^1 \\ \Phi_q^2 \\ \dots \\ \Phi_q^m \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где

$$k=1,2,\dots,m,$$

$$\begin{aligned} \Phi_{y^{[k]}}^k &= I + \frac{h_k}{6} [f_y(x_k, y^{[k]}, q) + 2f_y(\bar{x}_k, \bar{y}_k, q) * \\ &\quad * (I + \frac{h_k}{4} f_y(x_k, y^{[k]}, q))], \\ \Phi_{y^{[k+1]}}^k &= -I + \frac{h_k}{6} [f_y(x_{k+1}, y^{[k+1]}, q) + 2f_y(\bar{x}_k, \bar{y}_k, q) * \\ &\quad * (I - \frac{h_k}{4} f_y(x_{k+1}, y^{[k+1]}, q))], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Phi_q^k &= \frac{h_k}{6} [f_q(x_k, y^{[k]}, q) + 4f_q(\bar{x}_k, \bar{y}_k, q) + f_q(x_{k+1}, y^{[k+1]}, q) + \\ &\quad + \frac{h_k}{2} f_y(\bar{x}_k, \bar{y}_k, q)(f_q(x_k, y^{[k]}, q) - f_q(x_{k+1}, y^{[k+1]}, q))]. \end{aligned}$$

Замечание 1. Система (20) приближает сеточные значения с погрешностью порядка $h_{\max}^4 = \max h_i, i=1,2,\dots,m$, на решениях краевой задачи (1). Это следует из аппроксимации решения эрмитовым кубическим сплайном $S(x)$, а также из того, что погрешность аппроксимации производной сплайна в средних точках отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ имеет тот же порядок, что и $S(x)$.

Замечание 2. Подставим в (1) решение краевой задачи и проинтегрируем обе части тождества в пределах от x_k до x_{k+1} :

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x, q), q) dx.$$

Заменив интеграл на приближенное выражение по формуле Симпсона, получим уравнение

$$y^{[k+1]} - y^{[k]} = \frac{h_k}{6} [f(x_k, y^{[k]}, q) + 4f(\bar{x}_k^{[k]}, \bar{y}_k, q) + f(x_{k+1}, y^{[k+1]}, q)],$$

которое ранее было получено применением сплайн-коллокации.

Замечание 3. Как следует из (22), структура $N \times (N+1)$ -матрицы $[\Phi_y, \Phi_q]$, $N = n(m+1)$, имеет специальный вид, который важно учитывать в процессе продолжения по параметру при решении соответствующих систем линейных алгебраических уравнений в целях сокращения объема вычислений. Напомним, что при параметризации решаются системы линейных

алгебраических уравнений с матрицей $[\Phi_Y, \Phi_q]$, в которой вычеркивается столбец, соответствующий индексу текущего параметра. При этом один из возможных вариантов – применение метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

Тема 3. Адаптация сетки.

Одной из характерных особенностей нелинейной краевой задачи является возникновение больших градиентов решения в некоторой области изменения параметров модели. В этих условиях важную роль играет распределение узлов сетки (5). Для сохранения аппроксимационных свойств интерполяционного эрмитового сплайна (15) в методе сплайн-коллокации необходимо, чтобы сетка «подстраивалась» под численное решение в процессе продолжения решения по параметру.

Рассмотрим вариант адаптации сетки, в котором используется идея алгоритма выбора узлов сетки при сплайн-интерполяции функции с заданной точностью. Пусть функция $u(x)$, принадлежащая классу C^4 на отрезке $[a, b]$, приближается эрмитовым интерполяционным кубическим сплайном $S(x)$ класса C^1 на сетке (5), где сплайн определяется точно также, как в (15). Требуется задать новую сетку,

$$a = z_1 < z_2 < \dots < z_M < z_{M+1} = b, \quad H_i = z_{i+1} - z_i, \quad (24)$$

так определив узлы интерполяции z_k , $k = 1, 2, \dots, M+1$, чтобы абсолютная величина погрешности приближения не превышала заданного значения ε . Как известно, выражение погрешности приближения имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{H_i^4}{384} \left| \frac{d^4 u}{dx^4}(\theta_i) \right|, \quad \theta_i \in [z_i, z_{i+1}].$$

Поэтому узлы сетки (24) должны удовлетворять условиям:

$$H_i \left| \frac{d^4 u}{dx^4}(\theta_i) \right|^{\frac{1}{4}} = (384\varepsilon)^{\frac{1}{4}}. \quad (25)$$

При численном решении (1) используется видоизмененное условие (25), в котором роль функции $u(x)$ играет компонента

$u(x, q)$. Пусть $u(x)$ – компонента вектор-функции $u(x, q)$, являющейся решением краевой задачи (1) на сетке (5):

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_m < x_{m+1} = b, \quad h_i = x_{i+1} - x_i,$$

Предположим, что в соответствии с отмеченным ранее порядком аппроксимации дифференциальной краевой задачи системой нелинейных уравнений (20) абсолютная величина погрешности, связанная с $u(x)$, пропорциональна модулю четвертой производной:

$$\varepsilon = h_{\max}^4 \max \left| \frac{d^4 u}{dx^4}(x) \right|, \quad h_{\max} = \max h_i.$$

Если численное решение краевой задачи достаточно близко к точному, то можно попытаться улучшить его точность, пересчитав краевую задачу на сетке (24), несколько видоизменив условия (25).

Исходя из равенств, выполняемых для каждого из отрезков $[z_j, z_{j+1}]$,

$$\varepsilon = CH_j^4 \left| \frac{d^4 u}{dx^4}(\theta_j) \right|, \quad \theta_j \in [z_j, z_{j+1}], \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

где C – некоторая постоянная, составим сумму:

$$C^{\frac{1}{4}} \sum_{i=1}^M H_i \left| \frac{d^4 u}{dx^4}(\theta_i) \right|^{\frac{1}{4}} = M \varepsilon^{\frac{1}{4}} \approx C^{\frac{1}{4}} \int_a^b \left| \frac{d^4 u}{dx^4}(x) \right|^{\frac{1}{4}} dx.$$

Отсюда следует условия, аналогичные (25):

$$\int_{z_j}^{z_{j+1}} \left| \frac{d^4 u}{dx^4}(x) \right|^{\frac{1}{4}} dx = \frac{1}{M} \int_a^b \left| \frac{d^4 u}{dx^4}(x) \right|^{\frac{1}{4}} dx. \quad (26)$$

Если узлы сетки (24) удовлетворяют условиям (26), то мы вправе ожидать, что численное решение краевой задачи на этой сетке будет характеризоваться распределением погрешности, близким к равномерному. Как показывает численный эксперимент, использование сеток с почти равномерным распределением погрешности приводит, как правило, к существенному повышению точности численного решения.

На практике (26) заменяется близким по смыслу условием. Пусть

$$e(z) = \int_a^z \left| \frac{d^4 u}{dx^4}(x) \right|^{\frac{1}{4}} dx, \quad a \leq z \leq b.$$

Тогда правило выбора k -го узла сетки (24) состоит в решении уравнения относительно z_k :

$$e(z_k) = \frac{k-1}{M} e(b), \quad k=2,3,\dots,M. \quad (27)$$

В силу монотонности $\varphi(z)$ уравнение (27) имеет единственное решение.

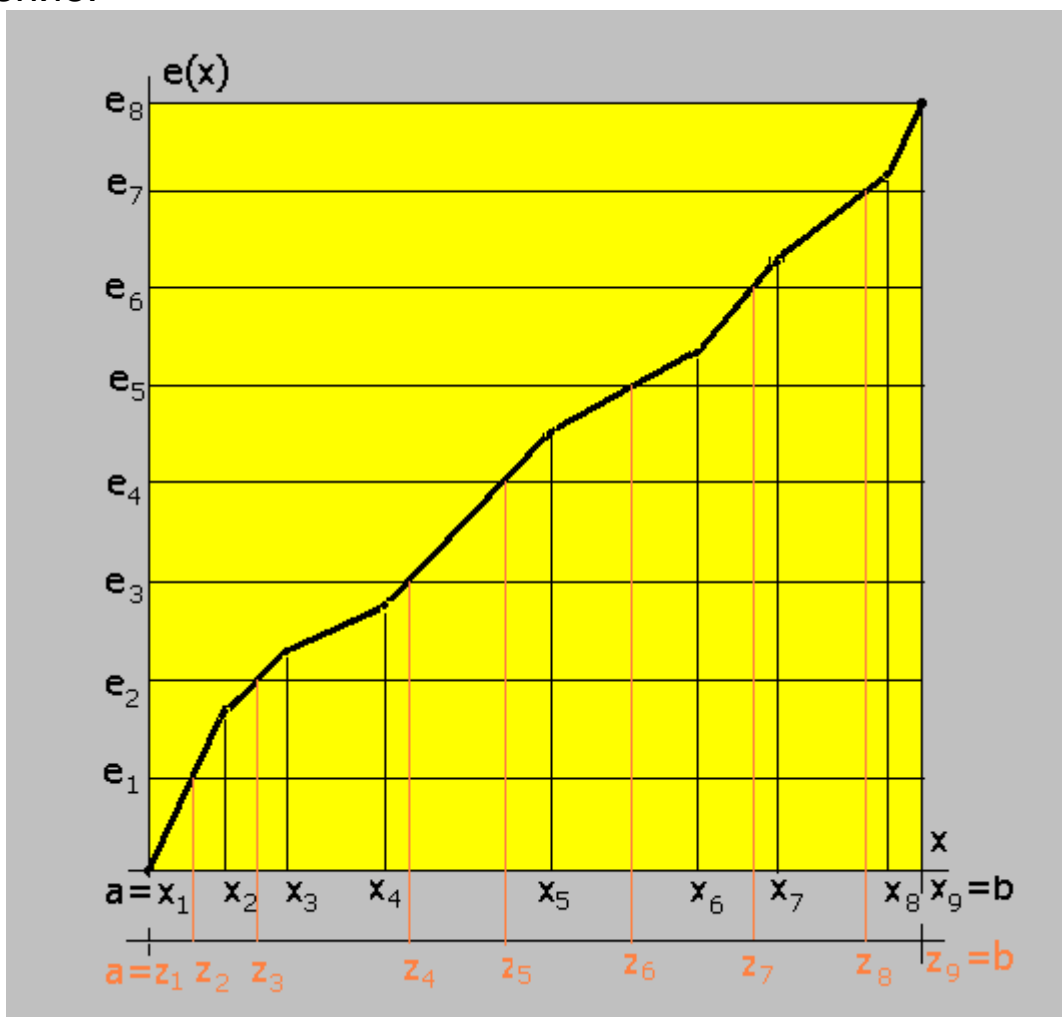


Рис.3. Схема формирования узлов сетки, на которой погрешность, представленная ломаной линией, распределяется равномерно. Узлы адаптированной сетки z_j , $j=1,2,\dots,9$, находятся по формуле (27), где $M = 8$. При этом $z_1=x_1=a$, $z_9=x_9=b$

Для простоты предположим, что распределение погрешности решения краевой задачи достаточно хорошо учитывается кусочно - постоянной функцией, которая на

каждом из интервалов $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 1, 2, \dots, m$, сетки (5) определяется 4-ой производной, вычисленной в средней точке отрезка. При этом графиком $e(z)$ будет ломаная кривая, соединяющая точки $(x_k, e(x_k))$, $k = 1, 2, \dots, m+1$, плоскости (x, e) . а задача построения сетки (24) сводится к отысканию точек пересечения ломаной с прямыми, параллельными оси абсцисс, отстоящих от оси расстояниях $e_j = i\Delta$, $\Delta = e(b)/M$, $i = 1, 2, \dots, M$, что отражает условие равномерного распределения погрешности на отрезке $[a, b]$ (см.Рис.1).

Заметим, что в качестве функции $u(x)$ может быть использована, например, $\|y(x, q)\|$.

Для приближенного вычисления 4-ой производной воспользуемся эрмитовым интерполяционным сплайном $s(x)$ 5-ой степени класса C^2 определенном на сетке (5). Пусть по прежнему $u(x)$ – компонента вектор-функции $y(x, q)$, Её производные являются соответственно компонентами вектор-функций

$$\frac{dy}{dx}(x) = f(x, y(x, q), q),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = f_y(x, y(x, q), q) \frac{dy}{dx}(x) + f_x(x, y(x, q), q).$$

Введем обозначения:

$$u_k = u(x_k), \quad u'_k = \frac{du}{dx}(x_k), \quad u''_k = \frac{d^2u}{dx^2}(x_k).$$

Потребуем в узлах сетки (5) выполнялись условия интерполяции:

$$s(x_k) = u_k, \quad \frac{ds}{dx}(x_k) = u'_k, \quad \frac{d^2s}{dx^2}(x_k) = u''_k, \quad k = i, i+1.$$

При этом на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ сплайн $s(x)$ имеют вид:

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad x = x_i + h_i t, \quad t \in [0, 1],$$

$$s(x) = (1-t)u_i + tu_{i+1} + t(1-t)[(1-t)a^{[i]} + tb^{[i]}] + \\ + t^2(1-t)^2[(1-t)c^{[i]} + td^{[i]}]. \quad (28)$$

Отсюда следуют выражения производных сплайна:

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad x = x_i + h_i t, \quad t \in [0, 1],$$

$$h_i \frac{ds}{dx}(x) = u_{i+1} - u_i + (1-2t)[(1-t)a^{[i]} + tb^{[i]}] + t(1-t)(b^{[i]} - a^{[i]}) \\ + 2t(1-t)(1-2t)[(1-t)c^{[i]} + td^{[i]}] + t^2(1-t)^2(d^{[i]} - c^{[i]}),$$

$$h_i^2 \frac{d^2s}{dx^2}(x) = 2(1-2t)(b^{[i]} - a^{[i]}) - 2[(1-t)a^{[i]} + tb^{[i]}] + \\ + (2-12t+12t^2)[(1-t)c^{[i]} + td^{[i]}] + 4t(1-t)(1-2t)(d^{[i]} - c^{[i]}).$$

Параметры сплайна $a^{[i]}$, $b^{[i]}$, $c^{[i]}$, $d^{[i]}$ определяются из условий интерполяции для производных $s(x)$. В результате получим:

$$a^{[i]} = -u_{i+1} + u_i + h_i u_i', \quad b^{[i]} = u_{i+1} - u_i - h_i u_{i+1}', \quad (29)$$

$$c^{[i]} = 2a^{[i]} - b^{[i]} + \frac{h_i^2}{2} u_i'', \quad d^{[i]} = 2b^{[i]} - a^{[i]} + \frac{h_i^2}{2} u_{i+1}''.$$

Из выражения 4-ой производной сплайна $s(x)$, которая имеет вид

$$h_i^4 \frac{d^4s}{dx^4}(x) = 24[(1-t)c^{[i]} + td^{[i]}] + 48(1-2t)(c^{[i]} - d^{[i]}),$$

следует:

$$h_i^4 \frac{d^4s}{dx^4}(\bar{x}_i) = 12(c^{[i]} + d^{[i]}),$$

т.е.

$$\frac{d^4s}{dx^4}(\bar{x}_i) = \frac{12}{h_i^2} \left(\frac{u_i' - u_{i+1}'}{h_i} + \frac{u_i'' + u_{i+1}''}{2} \right). \quad (30)$$

После адаптации сетки решение краевой задачи пересчитывается на новую сетку и принимается за стартовое решение в методе продолжения. Через заданное число шагов по параметру распределение узлов сетки вновь пересматривается. И так далее.

Отметим, что в алгоритме адаптации сетки предусмотрен ввод дополнительных узлов. Если величина отрезка $[z_k, z_{k+1}]$ оказалась больше заданного значения, то этот отрезок разбивается дополнительно, что способствует улучшению аппроксимации решения краевой задачи за счет увеличения числа нелинейных уравнений дискретной модели. В результате расстояния между всеми соседними узлами сетки не будут превышать заданного числа.

Перечислим основные достоинства рассмотренного численного метода исследования зависимости решения краевой задачи от параметра.

1. Высокий порядок погрешности аппроксимаций краевой задачи дискретной моделью на решениях (погрешность порядка h_{\max}^4 на неравномерной сетке) при указанном выборе сплайн-коллокации.
2. Учет возможности существования особых точек типа «поворот» в процессе продолжения по параметру, что позволяет изучать множественность решений краевой задачи за счет эффективного метода продолжения.
3. Адаптация сетки, как способ решения проблемы больших градиентов, если такая проблема возникает в процессе продолжения по параметру.
4. Учет разреженности матрицы систем линейных алгебраических уравнений, возникающих на итерациях.

Программная реализация метода в пакете программ «BPR-Q» подтвердила высокую эффективность метода на большом числе прикладных задач.

Тема 4. Дискретные модели нелинейных интегральных уравнений.

В Теме 4, Раздел 1, были даны примеры представления нелинейной краевой задачи для дифференциального уравнения высокого порядка с параметром q в виде нелинейного интегрального уравнения с линейными однородными краевыми условиями. Краевая задача имеет вид:

$$x \in [a, b], \quad P_n(x, \frac{d}{dx})u = F(x, u, q), \quad (31)$$

$$S \begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \\ \dots \\ u^{(n-2)}(a) \\ u^{(n-1)}(a) \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} u(b) \\ u'(b) \\ \dots \\ u^{(n-2)}(b) \\ u^{(n-1)}(b) \end{bmatrix} = 0.$$

Здесь $P_n(x, d/dx)$ - линейный дифференциальный оператор n -го порядка с непрерывными коэффициентами, S и T - $(n \times n)$ -матрицы; $F(x, u, q)$ - достаточно гладкая функция по

совокупности аргументов в области ее определения. Предполагается, что однородная краевая задача, которая следует из (31) при $F(x,u,q) \equiv 0$, имеет только тривиальное решение и, следовательно, существует функция Грина $g(x,s)$. При этом краевая задача (31) может быть представлена в виде нелинейного интегрального уравнения:

$$u(x) = \int_a^b g(x,s)F(s,u(s),q)ds. \quad (32)$$

Рассмотрим дискретную модель (32) на сетке (5) в виде системы нелинейных уравнений с параметром q относительно сеточных значений $u_k = u(x_k, q)$ искомой функции $u(x, q)$.

Один из подходов к численному решению интегрального уравнения (32) состоит в приближенной замене функции $F(x,u(x),q)$ на интерполяционный кубический сплайн $T(x)$ класса C^2 , определяемый на сетке (5) в виде:

$$T(x) = \sum_{k=1}^{m+1} T(x_k, u_k, q) \varphi_k(x). \quad (33)$$

Здесь $\varphi_k(x)$ - фундаментальный кубический сплайн, $k=1,2,\dots, m+1$, задаваемый условиями интерполяции:

$$\varphi_k(x_i) = \begin{cases} 1, & k=i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

$$\frac{d^3 \varphi_k}{dx^3}(x_2 - 0) = \frac{d^3 \varphi}{dx^3}(x_2 + 0), \quad \frac{d^3 \varphi_k}{dx^3}(x_m - 0) = \frac{d^3 \varphi}{dx^3}(x_m + 0).$$

При этом на каждом из отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ сплайн $\varphi_k(x)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} x \in [x_i, x_{i+1}], \quad x = x_i + h_i t, \quad t \in [0, 1], \\ \varphi_k(x) = (1-t)\varphi_k(x_i) + t\varphi(x_{i+1}) - \\ - \frac{h_i^2}{6} t(1-t)[(2-t)M_i^{[k]} + (1+t)M_{i+1}^{[k]}] \end{aligned} \quad (34)$$

Отсюда следуют выражения производных сплайна:

$$\begin{aligned} h_i \frac{d\varphi_k}{dx}(x) &= \varphi_k(x_{i+1}) - \varphi_k(x_i) - \frac{h_i^2}{6} ((1-2t)[(2-t)M_i^{[k]} + (1+t)M_{i+1}^{[k]}] + \\ &+ t(1-t)(M_{i+1}^{[k]} - M_i^{[k]})), \\ \frac{d^2 \varphi_k}{dx^2}(x) &= (1-t)M_i^{[k]} + tM_{i+1}^{[k]}, \quad \frac{d^3 \varphi_k}{dx^3}(x) = \frac{1}{h_i} (M_{i+1}^{[k]} - M_i^{[k]}), \end{aligned}$$

где $M_i^{[k]}$ $k = 1, 2, \dots, m+1$, - параметры сплайна $\varphi_k(x)$. Согласно (34) сплайн $\varphi_k(x)$ и его вторая производная непрерывны в узлах сетки при любом наборе параметров. Поэтому для построения сплайна класса C^2 осталось потребовать этого свойства от первой производной. В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров сплайна:

$$\begin{aligned} (h_1 + 2h_2)M_2^{[k]} + (h_2 - h_1)M_3^{[k]} &= R_2^{[k]}, \\ i=3,4,\dots,m-1, \\ h_{i-1}M_{i-1}^{[k]} + 2(h_i + h_{i+1})M_i^{[k]} + h_iM_{i+1}^{[k]} &= R_i^{[k]}, \\ (h_{m-1} - h_m)M_{m-1}^{[k]} + (2h_{m-1} + h_m)M_m^{[k]} &= R_m^{[k]}, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} R_2^{[k]} &= \frac{6h_2}{h_1 + h_2} \left[\frac{\varphi_k(x_3) - \varphi_k(x_2)}{h_2} - \frac{\varphi_k(x_2) - \varphi_k(x_1)}{h_1} \right], \\ i=3,4,\dots,m-1, \\ R_i^{[k]} &= 6 \left[\frac{\varphi_k(x_{i+1}) - \varphi_k(x_i)}{h_i} - \frac{\varphi_k(x_i) - \varphi_k(x_{i-1})}{h_{i-1}} \right], \\ R_m^{[k]} &= \frac{6h_{m-1}}{h_{m-1} + h_m} \left[\frac{\varphi_k(x_{m+1}) - \varphi_k(x_m)}{h_m} - \frac{\varphi_k(x_m) - \varphi_k(x_{m-1})}{h_{m-1}} \right]. \end{aligned}$$

Параметры $M_1^{[k]}$ и $M_{m+1}^{[k]}$ определяются после решения системы (34):

$$\begin{aligned} M_1^{[k]} &= \frac{1}{h_2} (h_1 + h_2)M_2^{[k]} - h_1M_3^{[k]}, \\ M_{m+1}^{[k]} &= \frac{1}{h_{m-1}} [(h_{m-1} + h_m)M_m^{[k]} - h_mM_{m-1}^{[k]}]. \end{aligned}$$

Отметим, что трехдиагональная матрица системы (35) характеризуется диагональным преобладанием. Поэтому эффективным способом вычисления параметров сплайна является метод прогонки.

Интерполяционный кубический сплайн $T(x)$ (33) приближает функцию $F(x, u(x, q), q)$ с погрешностью порядка h_{\max}^4 . После замены в (32) $F(x, u(x, q), q)$ на $T(x)$ получим приближенное представление интегрального уравнений в виде:

$$u(x) = \sum_{k=1}^m F(x_k, u_k, q) \int_a^b g(x, s) \varphi_k(s) ds. \quad (36)$$

Здесь u_k $k = 1, 2, \dots, m+1$, – приближенные сеточные значения решения интегрального уравнения. Приравняв в (36) значения x значениям узлов сетки, приходим к системе нелинейных уравнений относительно приближенных сеточных значений:

$$u_j = \sum_{k=1}^m W_j^{[k]} F(x_k, u_k, q), \quad j=1, 2, \dots, m+1, \quad (37)$$

где

$$W_j^{[k]} = \int_a^b g(x_j, s) \varphi_k(s) ds. \quad (38)$$

Тем самым получена дискретная модель интегрального уравнения (32).

Если функция Грина имеет точное достаточно простое выражение, то коэффициенты системы (37) могут быть найдены непосредственно из (38). В общем случае для их вычисления требуется найти решение серии линейных краевых задач. Действительно, рассмотрим функции $W^{[k]}(x)$, $k = 1, 2, \dots, m+1$, определяемые с помощью функции Грина:

$$W^{[k]}(x) = \int_a^b g(x, s) \varphi_k(s) ds.$$

Это означает, что $W^{[k]}(x)$ является представлением в виде интеграла решения линейной краевой задачи:

$$x \in [a, b], \quad P_n(x, \frac{d}{dx})W = \varphi_k(x), \quad k=1, 2, \dots, m+1, \quad (39)$$

$$S \begin{bmatrix} W^{[k]}(a) \\ \frac{dW^{[k]}}{dx}(a) \\ \frac{d^{n-2} \ddot{W}^{[k]}}{dx^{n-2}}(a) \\ \frac{d^{n-1} W^{[k]}}{dx^{n-1}}(a) \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} W^{[k]}(b) \\ \frac{dW^{[k]}}{dx}(b) \\ \frac{d^{n-2} \ddot{W}^{[k]}}{dx^{n-2}}(b) \\ \frac{d^{n-1} W^{[k]}}{dx^{n-1}}(b) \end{bmatrix} = 0,$$

формулировка которой следует из (31) после замены функции $F(x, u, q)$ на $\varphi_k(x)$. При этом $W_j^{[k]} = W^{[k]}(x_j)$.

Отметим, что в (33) и, следовательно, в (38) могут быть использованы другие базисные сплайны. Например,

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0, & x < x_k \\ \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, & x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}, & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0, & x > x_{k+1}. \end{cases}$$

При этом дискретная модель (37) определяет сеточные значения решения интегрального уравнения (32) с погрешностью порядка h_{\max}^2 .

Тема 5. Численные примеры.

В качестве иллюстрации применения метода продолжения решения по параметру рассмотрим ряд примеров нелинейных краевых задач из приложений.

1. Модель пленочного электростатическое реле, в которой равновесное положение подвижного электрода определяется с учетом его жесткости (см. раздел 1, тема 4).

Формулировка краевой задачи.

Система уравнений:

$$\begin{aligned} x \in [0, 1], \quad 0 \leq y < 1, \\ \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_4, \\ \frac{dy_4}{dx} &= \frac{1}{s_0} \left[y_3 + \frac{q}{(1-y_1)^2} \right], \end{aligned} \tag{40}$$

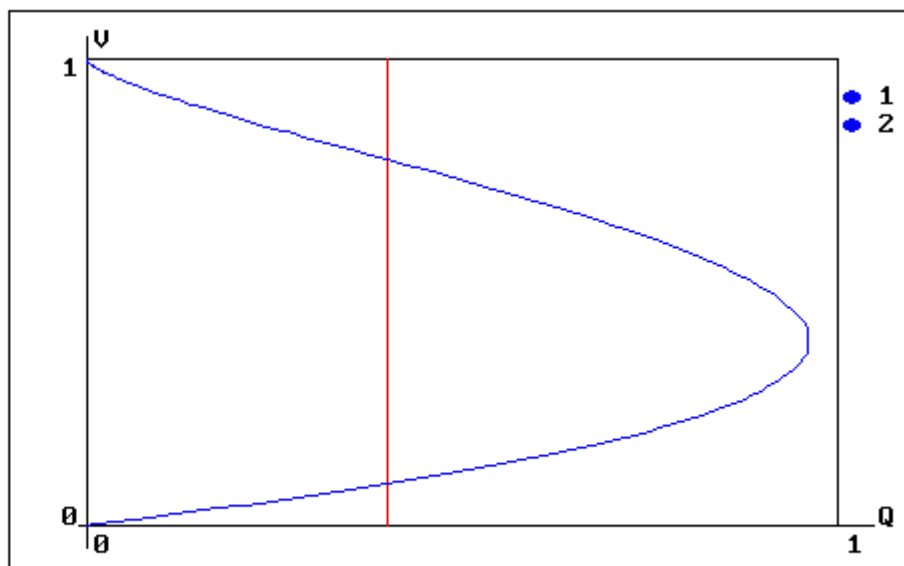
Краевые условия:

$$y_2(0) = y_4(0) = 0, \quad y_1(1) = y_2(1) = 0. \tag{41}$$

Здесь s_0 - параметр, пропорциональный жесткости подвижного электрода, $s_0 = 1$, $0 \leq q \leq 5$. Результаты вычислений представлены на рис.1-3.

ДИАГРАММА МНОЖЕСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ

КОМПОНЕНТА - 1
 масштабы:
 $Y_{\min} = 0.00E+00$
 $Y_{\max} = 1.00E+00$
 КОМПОНЕНТА - 2
 масштабы:
 $Y_{\min} = 0.00E+00$
 $Y_{\max} = 1.00E+00$
 МАСШТАБЫ Q:
 $Q_{\min} = 0.00E+00$
 $Q_{\max} = 5.00E+00$

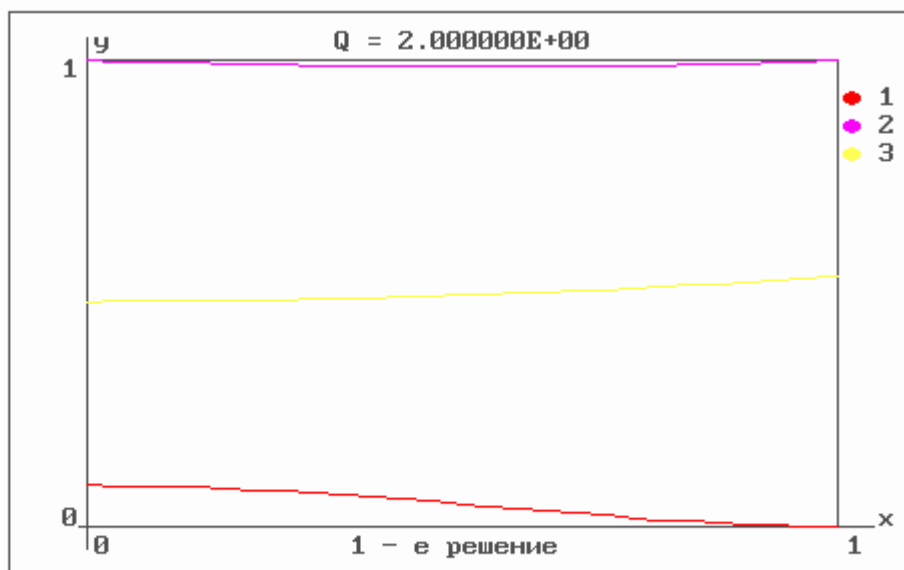


Press any key to continue

РИС.1. Диаграмма множественности решений краевой задачи (40)-(41) в виде графика зависимости компоненты $y(x)$ при $x = 0$ от параметра q .

ГРАФИКИ КОМПОНЕНТ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРА Q

КОМПОНЕНТА - 1
 масштабы:
 $Y_{\min} = 0.00E+00$
 $Y_{\max} = 1.00E+00$
 КОМПОНЕНТА - 2
 масштабы:
 $Y_{\min} = -1.00E+01$
 $Y_{\max} = 0.00E+00$
 КОМПОНЕНТА - 3
 масштабы:
 $Y_{\min} = -1.00E+01$
 $Y_{\max} = 1.00E+01$



число шагов 13 индексы (27 4) погрешность 0.873E-07

РИС.2. Множественность решений краевой задачи (40)-(41) при $q = 2$. График компоненты $y(x)$ первого решения.

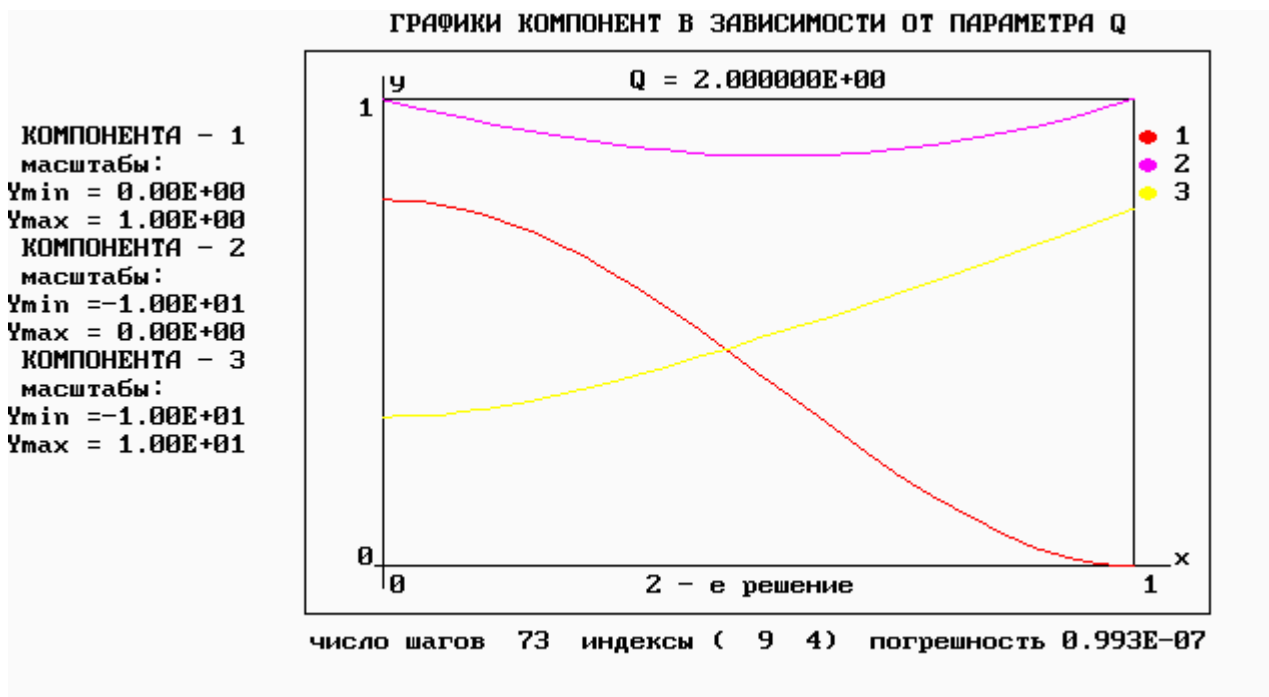


РИС.3. Множественность решений краевой задачи (40)-(41) при $q = 2$. График компоненты $y(x)$ второго решения.

2. Стационарные режимы работы каталитического реактора с кипящим слоем.

Формулировка краевой задачи.

Система уравнений:

$$\begin{aligned}
 x \in [0,1], \quad \frac{dy_1}{dx} &= y_2, \\
 \frac{dy_2}{dx} &= s_0[(s_1 + s_2)y_1 - s_2 y_3 + qf(y_1)y_4], \\
 \frac{dy_3}{dx} &= s_2(y_1 - y_3), \\
 \frac{dy_4}{dx} &= -s_3 f(y_1)y_4.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Краевые условия:

$$\begin{aligned}
 y_2(0) = y_3(0) = 0, \quad y_4(0) &= 1, \\
 y_2(1) &= 0.
 \end{aligned} \tag{43}$$

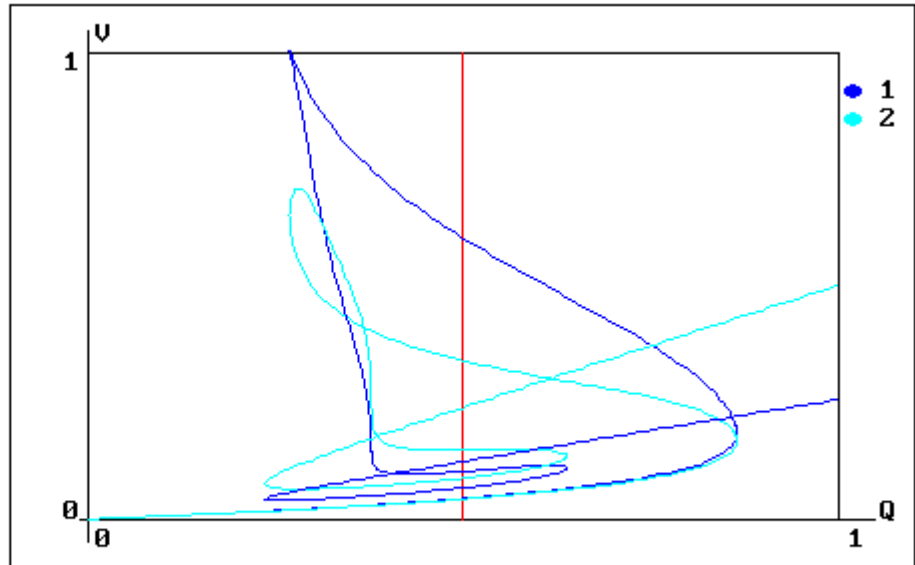
Здесь $y_1(x)$ и $y_3(x)$ – «безразмерные» температуры катализатора и газа, $y_4(x)$ – концентрация. Значения параметров модели:

$$\begin{aligned}
 s_0 = 1, \quad s_1 = 8, \quad s_2 = 5, \quad s_3 = 5, \\
 s_4 = -4, \quad s_5 = .5, \quad s_6 = .05, \quad 0 \leq q \leq 400.
 \end{aligned}$$

Результаты вычислений представлены на рис.4-9.

ДИАГРАММА МНОЖЕСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ

КОМПОНЕНТА - 1
 масштабы:
 $Y_{min} = 0.00E+00$
 $Y_{max} = 5.00E+00$
 КОМПОНЕНТА - 2
 масштабы:
 $Y_{min} = 0.00E+00$
 $Y_{max} = 5.00E+00$
 МАСШТАБЫ Q:
 $Q_{min} = 0.00E+00$
 $Q_{max} = 4.00E+02$

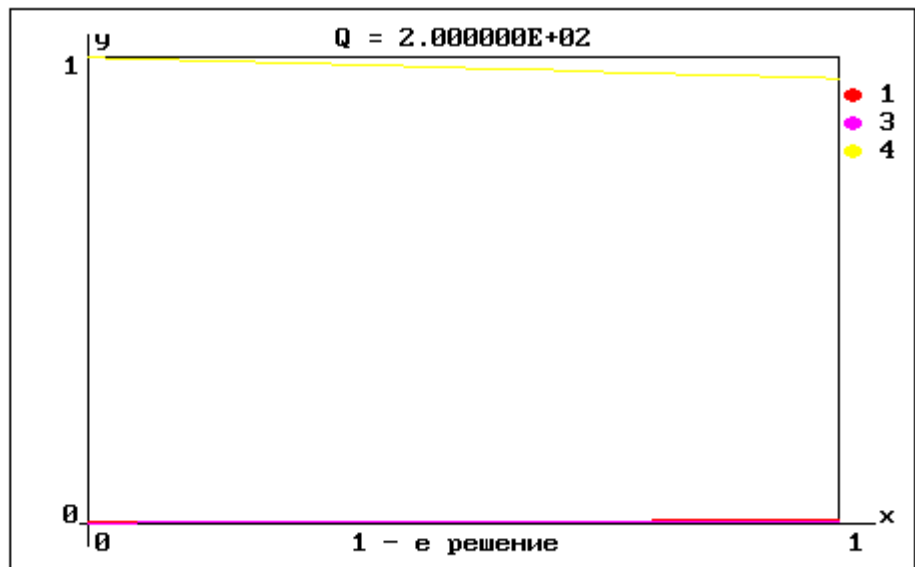


Press any key to continue

РИС.4. Диаграмма множественности решений краевой задачи (42)-(43) в виде графиков зависимости компоненты $y_1(x)$ при $x=0$ и $y_3(x)$ при $x=1$ от параметра q .

ГРАФИКИ КОМПОНЕНТ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРА Q

КОМПОНЕНТА - 1
 масштабы:
 $Y_{min} = 0.00E+00$
 $Y_{max} = 4.00E+01$
 КОМПОНЕНТА - 3
 масштабы:
 $Y_{min} = 0.00E+00$
 $Y_{max} = 4.00E+01$
 КОМПОНЕНТА - 4
 масштабы:
 $Y_{min} = 0.00E+00$
 $Y_{max} = 1.00E+00$

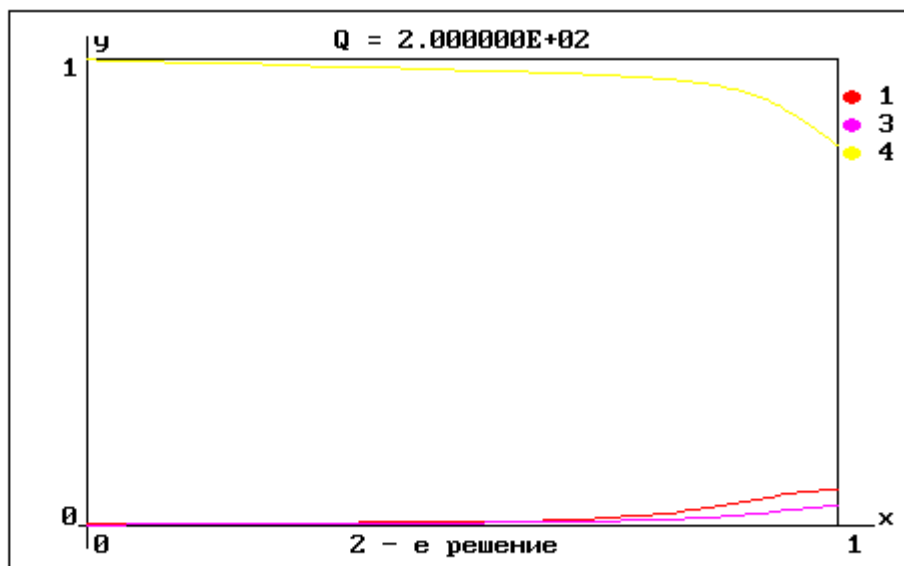


число шагов 66 индексы (53 0) погрешность 0.552E-08

РИС.5. Множественность решений краевой задачи (42)-(43) при $q = 200$. Графики компонент $y_1(x)$, $y_3(x)$ и $y_4(x)$ первого решения.

ГРАФИКИ КОМПОНЕНТ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРА Q

КОМПОНЕНТА - 1
 масштабы:
 $Y_{\min} = 0.00E+00$
 $Y_{\max} = 4.00E+01$
 КОМПОНЕНТА - 3
 масштабы:
 $Y_{\min} = 0.00E+00$
 $Y_{\max} = 4.00E+01$
 КОМПОНЕНТА - 4
 масштабы:
 $Y_{\min} = 0.00E+00$
 $Y_{\max} = 1.00E+00$

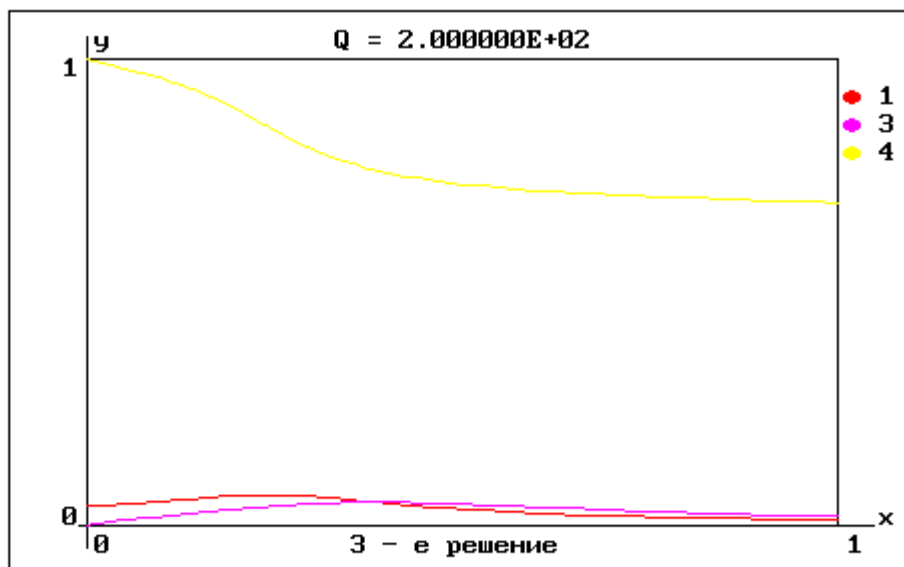


число шагов 164 индексы (61 0) погрешность $0.704E-07$

РИС.6. Множественность решений краевой задачи (42)-(43) при $q = 200$. Графики компонент $u_1(x)$, $u_3(x)$ и $u_4(x)$ второго решения.

ГРАФИКИ КОМПОНЕНТ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРА Q

КОМПОНЕНТА - 1
 масштабы:
 $Y_{\min} = 0.00E+00$
 $Y_{\max} = 4.00E+01$
 КОМПОНЕНТА - 3
 масштабы:
 $Y_{\min} = 0.00E+00$
 $Y_{\max} = 4.00E+01$
 КОМПОНЕНТА - 4
 масштабы:
 $Y_{\min} = 0.00E+00$
 $Y_{\max} = 1.00E+00$



число шагов 281 индексы (61 0) погрешность $0.293E-05$

РИС.7. Множественность решений краевой задачи (42)-(43) при $q = 200$. Графики компонент $u_1(x)$, $u_3(x)$ и $u_4(x)$ третьего решения.

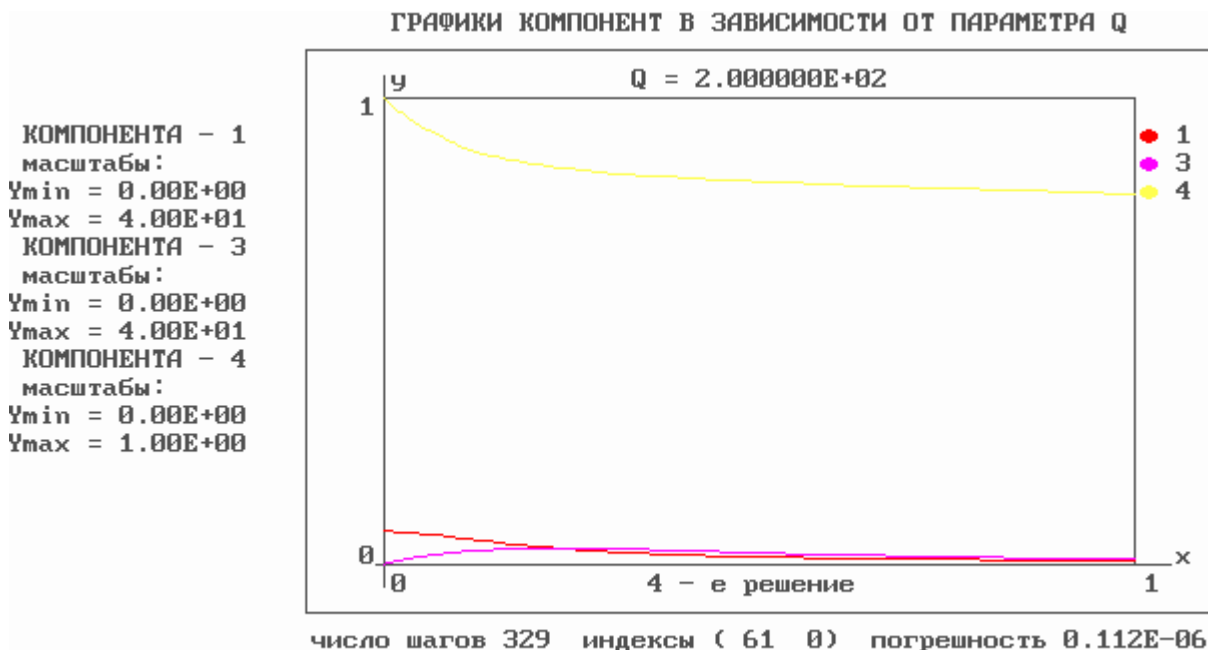


РИС.8. Множественность решений краевой задачи (42)-(43) при $q = 200$. Графики компонент $y_1(x)$, $y_3(x)$ и $y_4(x)$ четвертого решения.

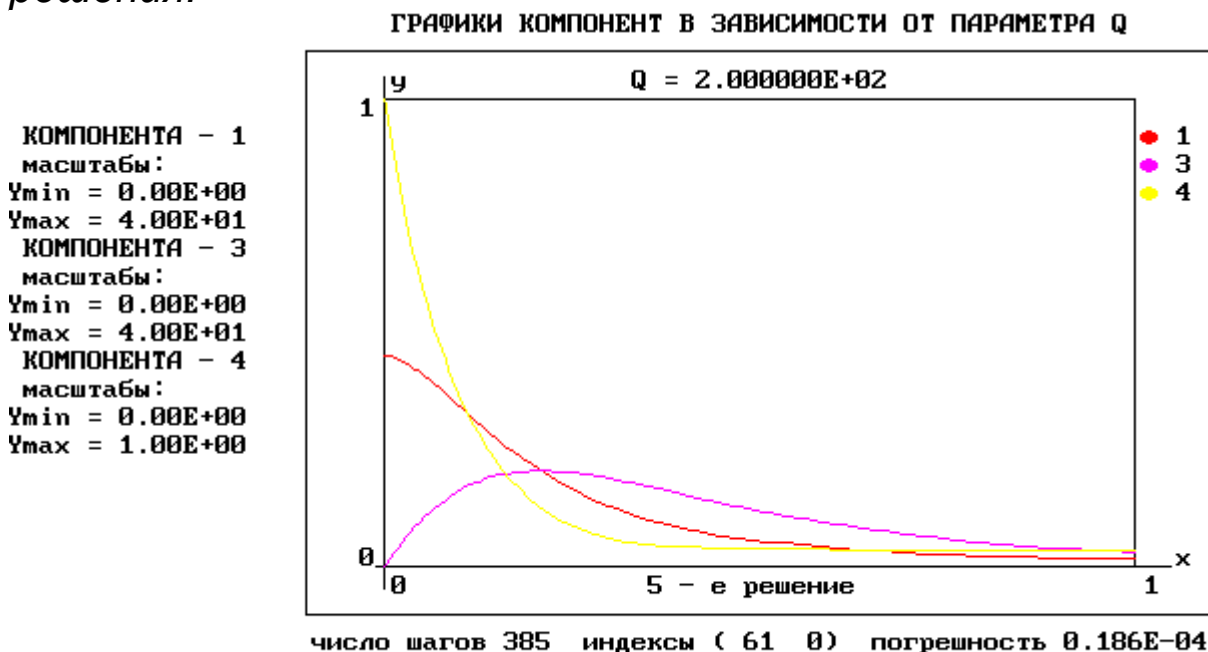


РИС.9. Множественность решений краевой задачи (42)-(43) при $q = 200$. Графики компонент $y_1(x)$, $y_3(x)$ и $y_4(x)$ пятого решения.

3. Краевая задача, описывающая предельный цикл осциллятора Ван дер Поля в зависимости от параметра.
Формулировка краевой задачи.

Система уравнений:

$$\begin{aligned}
 x \in [0,1], \quad \frac{dy_1}{dx} &= y_3 y_2, \\
 \frac{dy_2}{dx} &= y_3 [-y_1 + q s_0 y_2 (1 - y_1^2)], \\
 \frac{dy_3}{dx} &= 0,
 \end{aligned} \tag{44}$$

Краевые условия периодичности и трансверсальности:

$$y_1(0) = y_1(1), \quad y_2(0) = y_2(1), \quad y_1(0) = q s_0 y_2(0) [1 - y_1^2(0)]. \tag{45}$$

Здесь $y_3(x)$ - период, s_0 и q - параметры, $s_0 = 1$, $0 \leq q \leq 15$.
Начальное приближение решения в стартовой позиции метода продолжения по параметру использовалось в виде:

$$y_1(x) = 2 \cos(2\pi x), \quad y_2(x) = -4\pi \sin(2\pi x), \quad y_3(x) \equiv 2\pi.$$

Результаты вычислений представлены на рис.10-12.

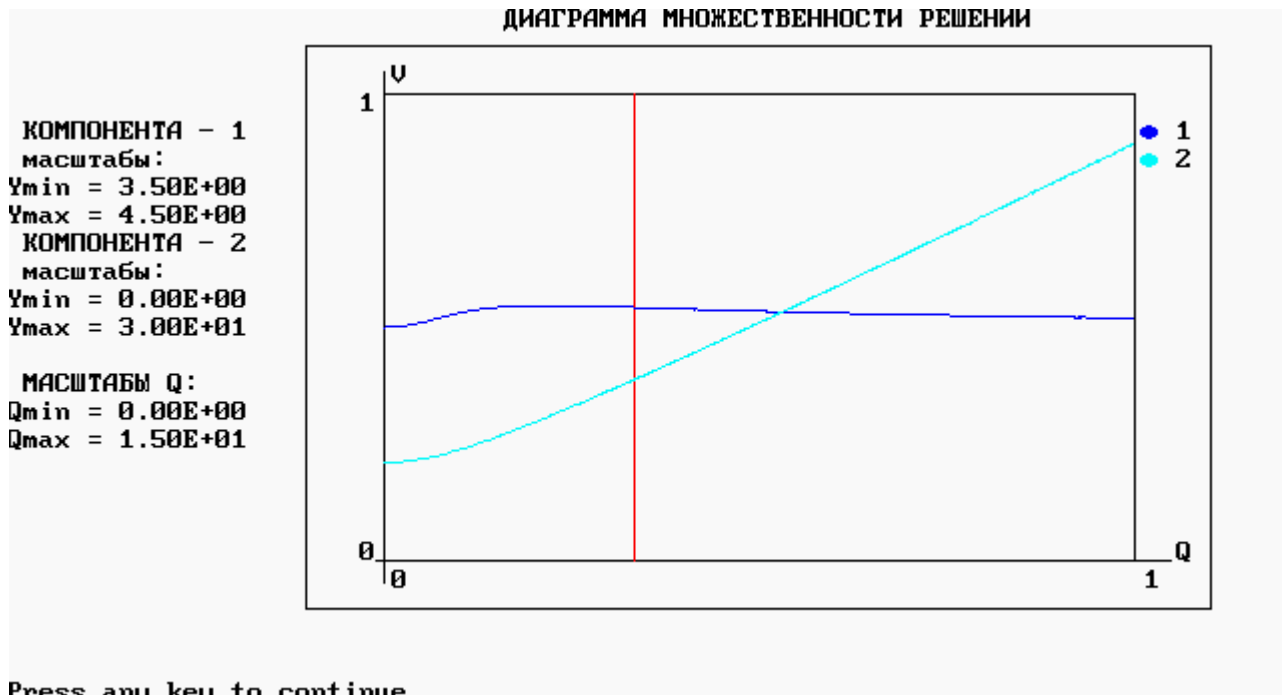


РИС.10. Диаграмма множественности решений краевой задачи (44)-(45) в виде графиков зависимости амплитуды колебаний и периода от параметра q . В данном случае имеет место единственность решения при всех $q > 0$.

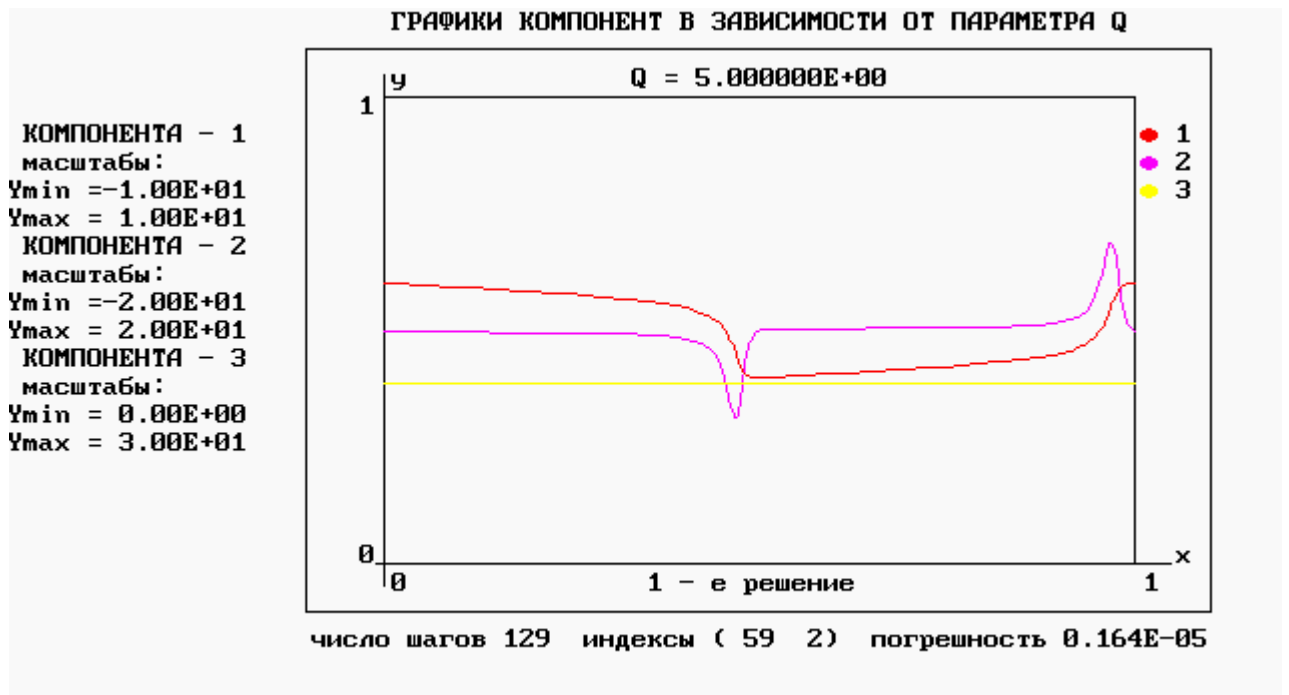


РИС.11. Графики компонент $y_1(x)$, $y_2(x)$ и $y_3(x)$ решения краевой задачи (44)-(45) при $q = 5$.

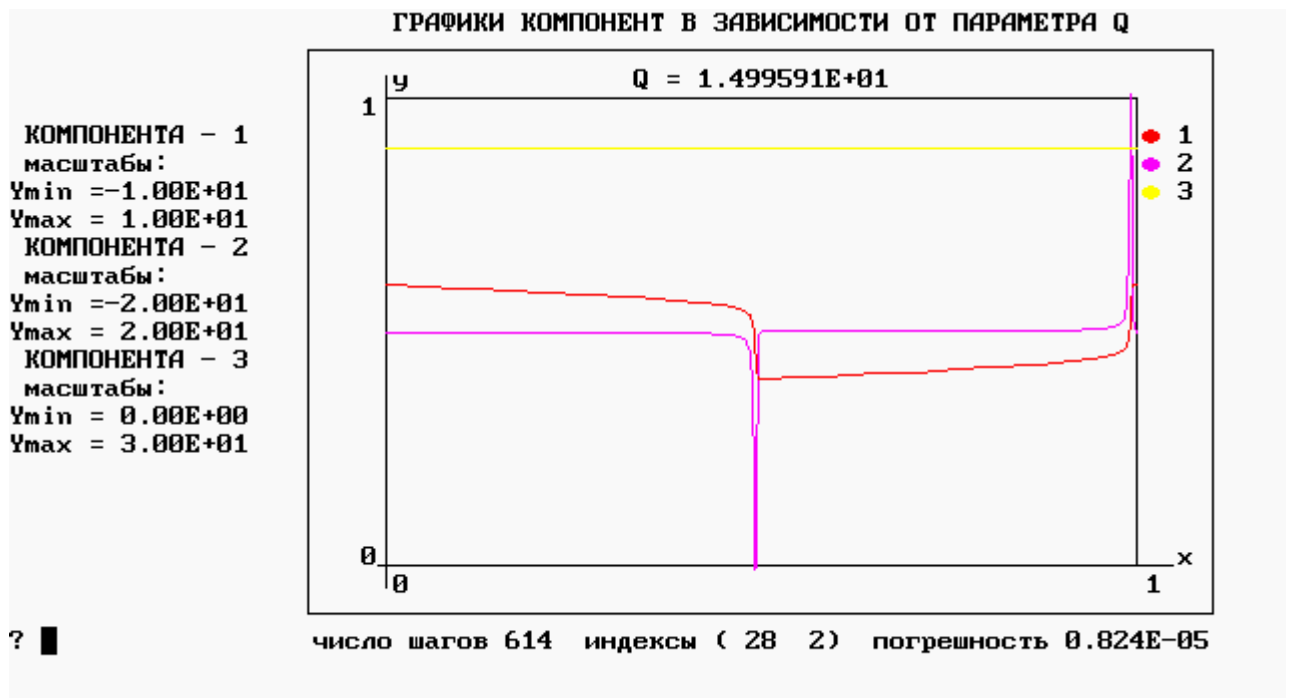


РИС.12. Графики компонент $y_1(x)$, $y_2(x)$ и $y_3(x)$ решения краевой задачи (44)-(45) при $q = 15$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Необходимость в издании данного пособия вызвана следующими обстоятельствами. В известной учебной литературе в основном излагаются теория линейных краевых задач и нелинейных краевых задач специального вида, что связано с возможностью получить априорную информацию о свойствах решения. Однако, в общем случае соотношение качественных и численных исследований меняется. Основным источником знаний становится вычислительный эксперимент. Применительно к нелинейным краевым задачам основу численного эксперимента составляют методы, изложению которых посвящено пособие. Пособие в сочетании с разработанными в Институте математики комплексами программ может служить обеспечением определенной части вычислительного практикума, связанного с математическим моделированием на различных факультетах НГУ.

Литература

1. Годунов С.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: Учебное пособие.- Новосибирск: Изд-во Новосиб. университета. 1994.- Т.1: Краевые задачи . – 264 с.
2. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. Москва: Наука.- 1973. –400 с.
3. Канторович Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика. // Успехи мат. наук. – 1948. – т.3, №6. – Стр. 89-175.
4. Березин И.С., Жидков Н.П., Методы вычислений. – Москва: ФМ.- 1962. –Том 2.- 640 с.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы. - Москва: Наука. -1975.-632 с.
6. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. –Москва: Мир. 1968.-183 с.
7. Keller H.B. Numerical methods for two-point boundary value problems.- Ontario – London; Waltham, Mass-Toronto: Blaisdell Publ. -1968.-184 p.
8. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения систем уравнений со многими неизвестными. - Москва: Мир.-1975.-558 с.
9. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. – Москва: Мир. 1991.-368 с.
10. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. - Москва: Наука.1980. 352 с.

11. Фадеев С.И. Программа численного решения нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром. // Вычислительные методы линейной алгебры. -Новосибирск: Наука, Сибирское отделение.-1990. Стр.104 - 200.
12. Фадеев С.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - Новосибирск: НГУ.- 1986.-Методические указания.-28 с.
13. Фадеев С.И. Линейные краевые задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на конечном отрезке. - Новосибирск: НГУ.- 1995.-Методические указания.-36 с.
14. Фадеев С.И., Покровская С.А., Березин А.Ю., Гайнова И.А. Пакет программ «STEP» для численного исследования систем нелинейных уравнений и автономных систем общего вида. Новосибирск: НГУ .- 1998.-Учебное пособие.-188 с.
15. Когай В.В., Фадеев С.И. Применение продолжения по параметру на основе метода множественной стрельбы для численного исследования нелинейных краевых задач. // Сибирский журнал индустриальной математики. - Новосибирск: Издательство Института математики.-2001.-Том IV, № 1(7). Стр.83-101.