

## ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2013 г.)

### ВАРИАНТ 1.1

1. Разложить функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 4}$$

в ряд Тейлора в точке  $x = 0$ . Чему равна производная  $f^{(2013)}(0)$ ? Найти радиус сходимости полученного степенного ряда и исследовать ряд на сходимость в конечных точках интервала сходимости.

2. В алгебре  $\mathbb{H}$  вещественных кватернионов с ортонормированным базисом  $1, i, j, k$  элемент  $a = i + j$  задает линейный оператор  $\mathcal{A} : q \mapsto aq, q \in \mathbb{H}$ . Доказать его нормальность, найти спектр и каноническую форму матрицы.

3. Цилиндр  $\Sigma$  в  $\mathbb{R}^3$  задан своим сечением  $x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 4y + 3 = 0$  с плоскостью  $z = 0$  и направлением  $\vec{v} = (2, 3, -13)$  прямолинейных образующих. Найти плоскость, сопряженную направлению  $\vec{m} = (1, 1, 0)$  относительно цилиндра  $\Sigma$ .

## ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2013 г.)

### ВАРИАНТ 1.2

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\iint_{0 \leq x \leq y} \frac{dx dy}{1 + x^3 y^5}.$$

5. Функция  $f(z)$  аналитична на всей комплексной плоскости за исключением точки  $z_0$ , в которой она имеет полюс 1-го порядка с вычетом  $A$ . Найти все конечные особые точки, указать их тип и вычислить в них вычеты для функции

$$g(z) = f((z + 1)^2 + 1) + \alpha f(4z + 1),$$

где  $\alpha$  — действительное число.

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y^2 y'' - y(y')^2 - 2y^2 y' + 2(y')^3 = 0, & t \geq 0, \\ y|_{t=0} = 3, \\ y'|_{t=0} = 3. \end{cases}$$

Сколько существует решений?

## ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2013 г.)

## ВАРИАНТ 2.1

1. Разложить функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 4}$$

в ряд Тейлора в точке  $x = 0$ . Чему равна производная  $f^{(2013)}(0)$ ? Найти радиус сходимости полученного степенного ряда и исследовать ряд на сходимость в конечных точках интервала сходимости.

2. В алгебре  $\mathbb{H}$  вещественных кватернионов с ортонормированным базисом  $1, i, j, k$  элемент  $c = j + k$  задает линейный оператор  $\mathcal{C} : q \mapsto cq - qc, q \in \mathbb{H}$ . Доказать его нормальность, найти спектр и каноническую форму матрицы.

3. Цилиндр  $\Sigma$  в  $\mathbb{R}^3$  задан своим сечением  $x^2 - 2xy + 4x - 4y - 1 = 0$  с плоскостью  $z = 0$  и направлением  $\vec{v} = (2, 5, 7)$  прямолинейных образующих. Найти плоскость, сопряженную направлению  $\vec{m} = (1, 2, 0)$  относительно цилиндра  $\Sigma$ .

## ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2013 г.)

## ВАРИАНТ 2.2

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\iint_{0 \leq y \leq x} \frac{dx dy}{1 + x^3 y^5}.$$

5. Функция  $f(z)$  аналитична на всей комплексной плоскости за исключением точки  $z_0$ , в которой она имеет полюс 1-го порядка с вычетом  $B$ . Найти все конечные особые точки, указать их тип и вычислить в них вычеты для функции

$$g(z) = f((z - 1)^2 + 9) + \alpha f(4z + 1),$$

где  $\alpha$  — действительное число.

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y^2 y'' + 4y^2 y' - y(y')^2 - (y')^3 = 0, & t \geq 0, \\ y|_{t=0} = 1, \\ y'|_{t=0} = 2. \end{cases}$$

Сколько существует решений?

## ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2013 г.)

## ВАРИАНТ 3.1

1. Разложить функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 9}$$

в ряд Тейлора в точке  $x = 0$ . Чему равна производная  $f^{(2013)}(0)$ ? Найти радиус сходимости полученного степенного ряда и исследовать ряд на сходимость в конечных точках интервала сходимости.

2. В алгебре  $\mathbb{H}$  вещественных кватернионов с ортонормированным базисом  $1, i, j, k$  элемент  $a = i + j + k$  задает линейный оператор  $\mathcal{A} : q \mapsto qa, q \in \mathbb{H}$ . Доказать его нормальность, найти спектр и каноническую форму матрицы.

3. Цилиндр  $\Sigma$  в  $\mathbb{R}^3$  задан своим сечением  $2xy - 5x^2 - y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$  с плоскостью  $z = 0$  и направлением  $\vec{v} = (3, 4, 14)$  прямолинейных образующих. Найти плоскость, сопряженную направлению  $\vec{m} = (1, 3, 0)$  относительно цилиндра  $\Sigma$ .

## ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2013 г.)

## ВАРИАНТ 3.2

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\iint_{0 \leq y \leq x} \frac{dx dy}{1 + x^4 y^4}.$$

5. Функция  $f(z)$  аналитична на всей комплексной плоскости за исключением точки  $z_0$ , в которой она имеет полюс 1-го порядка с вычетом  $C$ . Найти все конечные особые точки, указать их тип и вычислить в них вычеты для функции

$$g(z) = f((z + 1)^2 - 1) + \alpha f(4z - 1),$$

где  $\alpha$  — действительное число.

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y^2 y'' - y(y')^2 - 9y^2 y' + (y')^3 = 0, & t \geq 0, \\ y|_{t=0} = -3, \\ y'|_{t=0} = -9. \end{cases}$$

Сколько существует решений?

## ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2013 г.)

## ВАРИАНТ 4.1

1. Разложить функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 9}$$

в ряд Тейлора в точке  $x = 0$ . Чему равна производная  $f^{(2013)}(0)$ ? Найти радиус сходимости полученного степенного ряда и исследовать ряд на сходимость в конечных точках интервала сходимости.

2. В алгебре  $\mathbb{H}$  вещественных кватернионов с ортонормированным базисом  $1, i, j, k$  элемент  $c = i + j + k$  задает линейный оператор  $\mathcal{C} : q \mapsto qc - cq, q \in \mathbb{H}$ . Доказать его нормальность, найти спектр и каноническую форму матрицы.

3. Цилиндр  $\Sigma$  в  $\mathbb{R}^3$  задан своим сечением  $x^2 + 4xy - y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$  с плоскостью  $z = 0$  и направлением  $\vec{v} = (1, 1, 7)$  прямолинейных образующих. Найти плоскость, сопряженную направлению  $\vec{m} = (1, 4, 0)$  относительно цилиндра  $\Sigma$ .

## ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2013 г.)

## ВАРИАНТ 4.2

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\iint_{0 \leq x \leq y} \frac{dx dy}{y + x^4 y^4}.$$

5. Функция  $f(z)$  аналитична на всей комплексной плоскости за исключением точки  $z_0$ , в которой она имеет полюс 1-го порядка с вычетом  $D$ . Найти все конечные особые точки, указать их тип и вычислить в них вычеты для функции

$$g(z) = f((z - 1)^2 - 1) + \alpha f(4z - 9),$$

где  $\alpha$  — действительное число.

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y^2 y'' + 12y^2 y' - y(y')^2 - 3(y')^3 = 0, & t \geq 0, \\ y|_{t=0} = -1, \\ y'|_{t=0} = 2. \end{cases}$$

Сколько существует решений?