

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2012 г.)

ВАРИАНТ 1.1

1. Доказать неравенство

$$\frac{\sin \pi x}{x(1-x)} > \pi \quad \text{для } 0 < x < 1.$$

2. Найти канонический вид в главных осях для квадратичной формы  $q(x) = x^T A x$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , если  $A$  — магическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Найти касательные плоскости к эллипсоиду  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{11} = 1$ , проходящие через прямую  $x = 5, y = 0$ . При каких значениях параметра  $b$  эти плоскости составляют прямой двугранный угол?

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2012 г.)

ВАРИАНТ 1.2

4. На кубе  $Q = \{0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1\} \subset \mathbb{R}^3$  задана последовательность функций  $f_n(x, y, z) = x^n \cos(xyz)$ .

а. Найти поточечный предел  $f_0(x, y, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y, z)$ ,  $(x, y, z) \in Q$ , если он существует.

б. Сходится ли  $f_n$  к  $f_0$  равномерно на  $Q$  при  $n \rightarrow \infty$ , если существует  $f_0$ ?

в. Если существует  $f_0$ , возможен ли предельный переход под знаком интеграла:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q f_n(x, y, z) dx dy dz \stackrel{?}{=} \int_Q f_0(x, y, z) dx dy dz.$$

Ответы обосновать.

5. Вычислить интеграл  $\int_{\Gamma} \frac{a^z}{z - \xi} dz$  в смысле главного значения по Коши в случае  $a \geq 1$ ,

$\xi \in \mathbb{C}$ , если  $a^i = e^{i \ln a}$ ,  $\Gamma$  — прямая  $\{z : z = c + iy, c > 0, -\infty < y < \infty\}$ , проходимая в направлении возрастания  $y$ .

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' + |(t-1)y' + y| = 0, & t \geq 1, \\ y|_{t=1} = -4, \\ y'|_{t=1} = 0. \end{cases}$$

Указать максимальный промежуток, на котором существует решение. Что можно сказать о единственности?

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2012 г.)

ВАРИАНТ 2.1

1. Доказать неравенство

$$\sqrt[2012]{\frac{1}{x}} - \sqrt[2012]{\frac{1}{x+2012}} < \sqrt[2012]{\frac{1}{x^{2013}}} \quad \text{для } x > 0.$$

2. Найти канонический вид в главных осях для квадратичной формы  $q(x) = x^T A x$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , если  $A$  — магическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Найти касательные плоскости к эллипсоиду  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , проходящие через прямую  $y = 10, z = 0$ . При каких значениях параметра  $c$  эти плоскости составляют прямой двугранный угол?

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2012 г.)

ВАРИАНТ 2.2

4. На шаре  $B = \{x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^3$  задана последовательность функций  $f_n(x, y, z) = |xyz|^n$ .

а. Найти поточечный предел  $f_0(x, y, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y, z)$ ,  $(x, y, z) \in B$ , если он существует.

б. Сходится ли  $f_n$  к  $f_0$  равномерно на  $B$  при  $n \rightarrow \infty$ , если существует  $f_0$ ?

в. Если существует  $f_0$ , возможен ли предельный переход под знаком интеграла:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(x, y, z) dx dy dz \stackrel{?}{=} \int_B f_0(x, y, z) dx dy dz.$$

Ответы обосновать.

5. Вычислить интеграл  $\int_{\Gamma} \frac{a^{iz}}{z - \xi} dz$  в смысле главного значения по Коши в случае  $a \geq 1$ ,

$\xi \in \mathbb{C}$ , если  $a^i = e^{i \ln a}$ ,  $\Gamma$  — прямая  $\{z : z = x + ic, c < 0, -\infty < x < \infty\}$ , проходимая в направлении возрастания  $x$ .

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' + |(t-2)y' + y| = 0, & t \geq 2, \\ y|_{t=2} = -3, \\ y'|_{t=2} = 0. \end{cases}$$

Указать максимальный промежуток, на котором существует решение. Что можно сказать о единственности?

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2012 г.)

ВАРИАНТ 3.1

1. Доказать неравенство

$$\sqrt[2012]{x} - \sqrt[2012]{y} \leq \sqrt[2012]{x-y} \quad \text{для } x \geq y \geq 0.$$

2. Найти канонический вид в главных осях для квадратичной формы  $q(x) = x^T A x$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , если  $A$  — магическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Найти касательные плоскости к эллипсоиду  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{13} + \frac{z^2}{36} = 1$ , проходящие через прямую  $x = 0, z = 10$ . При каких значениях параметра  $a$  эти плоскости составляют прямой двугранный угол?

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2012 г.)

ВАРИАНТ 3.2

4. На интервале  $I = \{-2 < x < 2\} \subset \mathbb{R}$  дана последовательность функций  $f_n(x) = \max\{1 - (nx - n \sin n)^2, 0\}$ .

а. Существует ли поточечный предел  $f_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  для  $x \in I$ ? Найти его, если он существует.

б. Сходится ли  $f_n$  к  $f_0$  равномерно на  $I$  при  $n \rightarrow \infty$ , если существует  $f_0$ ?

в. Найти предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-2}^2 f_n(x) dx.$$

Ответы обосновать.

5. Вычислить интеграл  $\int_{\Gamma} \frac{a^z}{z - \xi} dz$  в смысле главного значения по Коши в случае  $0 < a \leq 1, \xi \in \mathbb{C}$ , если  $a^t = e^{t \ln a}$ ,  $\Gamma$  — прямая  $\{z : z = c + iy, c > 0, -\infty < y < \infty\}$ , проходимая в направлении возрастания  $y$ .

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' + |(t-3)y' + y| = 0, & t \geq 3, \\ y|_{t=3} = -2, \\ y'|_{t=3} = 0. \end{cases}$$

Указать максимальный промежуток, на котором существует решение. Что можно сказать о единственности?

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2012 г.)

ВАРИАНТ 4.1

1. Доказать неравенство

$$\sqrt[2012]{2011x} + 2011 \sqrt[2012]{y} \leq 2012 \sqrt[2012]{\frac{2011(x+y)}{2012}} \quad \text{для } x \geq 0, y \geq 0.$$

2. Найти канонический вид в главных осях для квадратичной формы  $q(x) = x^T A x$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , если  $A$  — магическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти касательные плоскости к эллипсоиду  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{144} + \frac{z^2}{14} = 1$ , проходящие через прямую  $x = 0, y = 13$ . При каких значениях параметра  $a$  эти плоскости составляют прямой двугранный угол?

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2012 г.)

ВАРИАНТ 4.2

4. На интервале  $I = \{-2 < x < 2\} \subset \mathbb{R}$  дана последовательность функций  $f_n(x) = \max\{n - n^3(x - \sin \frac{x}{n})^2, 0\}$ .

а. Существует ли поточечный предел  $f_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  для  $x \in I$ ? Найти его, если он существует.

б. Сходится ли  $f_n$  к  $f_0$  равномерно на  $I$  при  $n \rightarrow \infty$ , если существует  $f_0$ ?

в. Если существует  $f_0$ , возможен ли предельный переход под знаком интеграла:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-2}^2 f_n(x) dx \stackrel{?}{=} \int_{-2}^2 f_0(x) dx.$$

Ответы обосновать.

5. Вычислить интеграл  $\int_{\Gamma} \frac{a^{iz}}{z - \xi} dz$  в смысле главного значения по Коши в случае  $0 < a \leq 1, \xi \in \mathbb{C}$ , если  $a^i = e^{i \ln a}$ ,  $\Gamma$  — прямая  $\{z : z = x + ic, c < 0, -\infty < x < \infty\}$ , проходимая в направлении возрастания  $x$ .

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' + |(t-4)y' + y| = 0, & t \geq 4, \\ y|_{t=4} = -1, \\ y'|_{t=4} = 0. \end{cases}$$

Указать максимальный промежуток, на котором существует решение. Что можно сказать о единственности?