

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2004 г.)

ВАРИАНТ 1.1

1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2}(1 - \cos x), & x > 0, \\ 1/2, & x \leq 0 \end{cases}$$

на интервале $(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$. Является ли $f'(x)$ равномерно непрерывной на этом интервале?

2. При каких $x, y \in \mathbb{R}$ матрица $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & 0 \end{pmatrix}$ подобна диагональной вещественной матрице? Какова доля площади множества таких точек (x, y) в круге $x^2 + y^2 < r^2, r > 0$?

3. К поверхности $\alpha : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ провести касательную плоскость ρ , содержащую прямую $x = y = 2 - z$. Найти уравнение поверхности, полученной отражением поверхности α относительно плоскости ρ .

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2004 г.)

ВАРИАНТ 1.2

4. Рассмотрим часть K конической поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченную плоскостью $y = 1$. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_K \frac{x}{y} dx dy + \sin y dz dx.$$

5. Используя дробно-линейную функцию, отобразить конформно полуплоскость $\{z = x + iy : y > x\}$ на круг $\{w : |w - i| < \rho\}$ так, чтобы выполнялись условия $w(-1) = i, w'(-1) = i$. Найти ρ .

6. Решить краевую задачу

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3t \end{pmatrix} y, \\ \sup_{t \in \mathbb{R}} |y(t)| < \infty.$$

Сколько существует решений?

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2004 г.)

ВАРИАНТ 2.1

1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} \sin x, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

на интервале $(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$. Является ли $f'(x)$ равномерно непрерывной на этом интервале?

2. При каких $x, y \in \mathbb{R}$ матрица $\begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 3x \end{pmatrix}$ подобна диагональной вещественной матрице? Какова доля площади множества таких точек (x, y) в круге $x^2 + y^2 < r^2, r > 0$?

3. К поверхности $\alpha : x^2 + 2y^2 - z = 6$ провести касательную плоскость ρ , содержащую прямую $-1 - x = y - 3 = \frac{z - 1}{2}$. Найти уравнение поверхности, полученной отражением поверхности α относительно плоскости ρ .

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2004 г.)

ВАРИАНТ 2.2

4. Рассмотрим часть K конической поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченную плоскостью $y = 1$. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_K \frac{x}{y^2} dx dy + \cos y dz dx.$$

5. Используя дробно-линейную функцию, отобразить конформно круг $\{z : |z| < 1\}$ на круг $\{w : |w - i| < \rho\}$ так, чтобы выполнялись условия $w(1/2) = i, w'(1/2) = i$. Найти ρ .

6. Решить краевую задачу

$$y' = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -2t^3 \end{pmatrix} y, \\ \sup_{t \in \mathbb{R}} |y(t)| < \infty.$$

Сколько существует решений?

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2004 г.)

ВАРИАНТ 3.1

1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} \ln(1+x), & x > 0, \\ 1 - x/2, & x \leq 0 \end{cases}$$

на интервале $(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$. Является ли $f'(x)$ равномерно непрерывной на этом интервале?

2. При каких $x, y \in \mathbb{R}$ матрица $\begin{pmatrix} x & 4y \\ -y & 0 \end{pmatrix}$ подобна диагональной вещественной матрице? Какова доля площади множества таких точек (x, y) в круге $x^2 + y^2 < r^2, r > 0$?

3. К поверхности $\alpha : 2x^2 + 3y^2 = 1 + 4z^2$ провести касательную плоскость ρ , содержащую прямую $2x - 1 = y = z$. Найти уравнение поверхности, полученной отражением поверхности α относительно плоскости ρ .

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2004 г.)

ВАРИАНТ 3.2

4. Рассмотрим часть K конической поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченную плоскостью $y = 1$. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_K \frac{x^2}{y^2} dx dy + y^2 \ln y dz dx.$$

5. Используя дробно-линейную функцию, отобразить конформно полуплоскость $\{z = x + iy : y > 1\}$ на круг $\{w : |w - 2i| < \rho\}$ так, чтобы выполнялись условия $w(2i) = 2i, w'(2i) = 1 + 2i$. Найти ρ .

6. Решить краевую задачу

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4t \end{pmatrix} y, \\ \sup_{t \in \mathbb{R}} |y(t)| < \infty.$$

Сколько существует решений?

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2004 г.)

ВАРИАНТ 4.1

1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1}(e^x - 1), & x > 0, \\ 1 + x/2, & x \leq 0 \end{cases}$$

на интервале $(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$. Является ли $f'(x)$ равномерно непрерывной на этом интервале?

2. При каких $x, y \in R$ матрица $\begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 5x \end{pmatrix}$ подобна диагональной вещественной матрице? Какова доля площади множества таких точек (x, y) в круге $x^2 + y^2 < r^2, r > 0$?

3. К поверхности $\alpha : 3x^2 + 2y^2 = 6z^2 - 1$ провести касательную плоскость ρ , содержащую прямую $3x + 3 = 2y + 4 = 3z + 3$. Найти уравнение поверхности, полученной отражением поверхности α относительно плоскости ρ .

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2004 г.)

ВАРИАНТ 4.2

4. Рассмотрим часть K конической поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченную плоскостью $y = 1$. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_K \frac{x^2}{y} dx dy + \operatorname{arctg} y dz dx.$$

5. Используя дробно-линейную функцию, отобразить конформно круг $\{z : |z - i| < 1\}$ на круг $\{w : |w - i| < \rho\}$ так, чтобы выполнялись условия $w(3i/2) = i, w'(3i/2) = 1 + i$. Найти ρ .

6. Решить краевую задачу

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4t^3 \end{pmatrix} y, \\ \sup_{t \in R} |y(t)| < \infty.$$

Сколько существует решений?