

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2002 г.)

ВАРИАНТ 1.1

1. В окрестности точки $(1, 1, 1)$ уравнение $y + zy + z^5 + x - 4 = 0$ определяет гладкую функцию $z = z(x, y)$. Найти значение d^2z в точке $(1, 1, 1)$ на векторе нормали к кривой, определяемой уравнением $\sin \pi(x + y) + \frac{y}{x} - 1 = 0$.

2. На пространстве вещественных симметричных матриц порядка 2 задан линейный оператор $\varphi : X \rightarrow AX + XA^T$, $X \in M_2(\mathbb{R})$, $X^T = X$. Найти жорданову форму для матрицы оператора φ , если $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

3. В евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 фиксирована точка $M(x_0, y_0, z_0)$. Найти условие (уравнение) на координаты точки M , при выполнении которого эллипс $x^2 + 2y^2 = 1$, $z = 0$, виден из точки M как окружность.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2002 г.)

ВАРИАНТ 1.2

4. Найти объем тела, полученного при вращении области D , ограниченной кривой $r = \sin 3\varphi$, вокруг оси $\varphi = \pi/3$.

5. Пусть D есть вся комплексная плоскость без луча $\{0 \leq x \leq +\infty, y = 0\}$, $w_0(z)$ есть ветвь функции $w = \operatorname{Ln}(1 + \sqrt{z})$ такая, что $w_0(-1) = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{7\pi i}{4}$. Найти $w_0(x + i0) - w_0(x - i0)$ для $x \in (0, 1)$.

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' + 2y' - |y| = -t^2 - 4t - 2, & t > 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

Сколько существует решений?

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2002 г.)

ВАРИАНТ 2.1

1. В окрестности точки $(1, 1, 1)$ уравнение $x + z^2x + z^4 + y^2 - 4 = 0$ определяет гладкую функцию $z = z(x, y)$. Найти значение d^2z в точке $(1, 1, 1)$ на векторе нормали к кривой, определяемой уравнением $\cos \pi(x + y) + yx - 2 = 0$.

2. На пространстве вещественных симметричных матриц порядка 2 задан линейный оператор $\varphi : X \rightarrow AX + XA^T$, $X \in M_2(\mathbb{R})$, $X^T = X$. Найти жорданову форму для матрицы оператора φ , если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

3. В евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 фиксирована точка $M(x_0, y_0, z_0)$. Найти условие (уравнение) на координаты точки M , при выполнении которого окружность $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, видна из точки M как эллипс с отношением полуосей $1 : \sqrt{2}$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2002 г.)

ВАРИАНТ 2.2

4. Найти объем тела, полученного при вращении области D , ограниченной кривой $r = \sin 3\varphi$, вокруг оси $\varphi = 2\pi/3$.

5. Пусть D есть вся комплексная плоскость без отрезка $\{-1 \leq x \leq 1, y = 0\}$, $w_0(z)$ есть ветвь функции $w = \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$ такая, что $w_0(-i0) = 0$. Найти $w_0(i)$.

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' + 4y' - 4|y| = -8t^2 - 16t - 4, & t > 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

Сколько существует решений?

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2002 г.)

ВАРИАНТ 3.1

1. В окрестности точки $(1, 1, 1)$ уравнение $x^2 + zy + z^4 + y^2 - 4 = 0$ определяет гладкую функцию $z = z(x, y)$. Найти значение d^2z в точке $(1, 1, 1)$ на векторе нормали к кривой, определяемой уравнением $\cos \pi(x + y) + \frac{x}{y} - 2 = 0$.

2. На пространстве вещественных симметричных матриц порядка 2 задан линейный оператор $\varphi : X \rightarrow AX + XA^T$, $X \in M_2(\mathbb{R})$, $X^T = X$. Найти жорданову форму для матрицы оператора φ , если $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.

3. В евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 фиксирована точка $M(x_0, y_0, z_0)$. Найти условие (уравнение) на координаты точки M , при выполнении которого эллипс $x^2 + 2y^2 = 1$, $z = 1$, виден из точки M как окружность.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2002 г.)

ВАРИАНТ 3.2

4. Найти объем тела, полученного при вращении области D , ограниченной кривой $r = \sin 4\varphi$, вокруг оси $\varphi = \pi/4$.

5. Пусть D есть вся комплексная плоскость с разрезом по лучу $\{-\infty \leq x \leq 0, y = 0\}$, $w_0(z)$ есть ветвь функции $w = \sqrt{z} \operatorname{Ln} z$ такая, что $\operatorname{Im} w_0(2) = 2\sqrt{2}\pi$. Найти $w_0(x + i0) - w_0(x - i0)$, $x < 0$.

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' - 2y' - |y| = -t^2 + 4t - 2, & t > 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

Сколько существует решений?

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2002 г.)

ВАРИАНТ 4.1

1. В окрестности точки $(1, 1, 1)$ уравнение $y^3 + z^2x + z^3 + x^2 - 4 = 0$ определяет гладкую функцию $z = z(x, y)$. Найти значение d^2z в точке $(1, 1, 1)$ на векторе нормали к кривой, определяемой уравнением $\sin \pi(x + y) + yx - 1 = 0$.

2. На пространстве вещественных симметричных матриц порядка 2 задан линейный оператор $\varphi : X \rightarrow AX + XA^T$, $X \in M_2(\mathbb{R})$, $X^T = X$. Найти жорданову форму для матрицы оператора φ , если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

3. В евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 фиксирована точка $M(x_0, y_0, z_0)$. Найти условие (уравнение) на координаты точки M , при выполнении которого эллипс $y^2 + 2z^2 = 1$, $x = 0$, виден из точки M как эллипс с отношением полуосей $1 : \sqrt{3}$.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (2002 г.)

ВАРИАНТ 4.2

4. Найти объем тела, полученного при вращении области D , ограниченной кривой $r = \sin 4\varphi$, вокруг оси $\varphi = \pi/2$.

5. Пусть D есть вся комплексная плоскость с разрезом по отрезку $\{-1 \leq x \leq 1, y = 0\}$, $w_0(z)$ есть ветвь функции $w = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$ такая, что $w_0(-i0) = i$. Найти $w_0(\infty)$.

6. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' - 4y' - 4|y| = -8t^2 + 16t - 4, & t > 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

Сколько существует решений?