

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)**

Утверждено:

_____
_____
_____
_____

Программа  
**Государственного экзамена по математике**

Направление подготовки  
**010800 – Механика и математическое моделирование**

**Все профили подготовки**

Квалификация (степень) выпускника  
**Магистр**

Форма обучения  
**Очная**

Автор(ы): \_\_\_\_\_ проф. А.С. Морозов

Новосибирск 2014

## **Общие положения**

Подготовка и проведение государственного экзамена регулируется Положением о государственном экзамене ММФ НГУ от 20 июня 2014 г. № 816-1. Государственный экзамен (ГЭ) входит в цикл «Государственная итоговая аттестация» (ГИА) и проводится с целью подтверждения базовых математических знаний. Сроки сдачи ГЭ, вид экзамена и перечень испытаний определяются Ученым советом факультета и фиксируются в программе экзамена. Студенты, не сдавшие ГЭ, не допускаются к защите ВКР.

## **I. Обобщенные решения уравнений математической физики**

Введение. Математический аппарат. Концепция обобщенного решения. Примеры обобщенных решений.

Постановка задачи Стефана. Физические постулаты теории фазовых переходов.

Математическая модель. Классическая постановка задачи Стефана. Понятие обобщенного решения задачи Стефана.

Существование обобщенных решений задачи Стефана. Формулировка теоремы о существовании обобщенных решений задачи Стефана. Параболическая аппроксимация.

Предельный переход в параболической аппроксимации по малому параметру. Единственность обобщенных решений задачи Стефана. Формулировка теоремы о единственности обобщенных решений задачи Стефана. Двойственная задача, ее разрешимость.

Скалярные законы сохранения. Понятие скалярного закона сохранения. Примеры некорректности краевых задач для скалярных законов сохранения. Градиентная катастрофа. Пример неединственности слабых обобщенных решений.

Энтропийные решения скалярных законов сохранения. Понятие энтропийного решения. Примеры энтропийных решений. Корректность задачи Коши в классе энтропийных решений. Параболическая регуляризация.

Мерозначные решения скалярных законов сохранения. Меры Янга. Существование мер Янга. Понятие мерозначного решения скалярного закона сохранения. Теорема о разрешимости в классе мерозначных решений. Теорема об эквивалентности понятий энтропийных и мерозначных решений в случае регулярных мер.

Уравнения дорожного движения. Уравнение дорожного движения в форме скалярного закона сохранения. Иерархия решений уравнения дорожного движения в зависимости от дорожной ситуации.

## **Рекомендованная литература**

1. Басов И.В. и др. Математические модели механики сплошных сред: учебное пособие / И.В. Басов, О.Б. Бочаров, С.А. Сажеников. - Новосибир. гос. ун-т. Новосибирск, 2005. - 84 с.
2. Ладъженская О.А. и др. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладъженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. - М.: Наука, 1967. - 736 с.
3. Шелухин В.В. Энтропийные решения скалярных законов сохранения: Учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2002. - 67 с.
4. Serre D. Systems of Conservation Laws 1: Hyperbolicity, Entropies, Shock waves. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. -263 p.

5. Монахов В.Н. Дифференциальные уравнения математической физики: курс лекций / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2001. - 154 с.
6. Басов И.В. и др. Математические модели механики сплошных сред: учебное пособие / И.В. Басов, О.Б. Бочаров, С.А. Саженов. - Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2005. -. 84 с.
7. Ладыженская О.А. и др. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уралцева. - М.: Наука, 1967. - 736 с.
8. Шелухин В.В. Энтропийные решения скалярных законов сохранения: Учебное пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2002. - 67 с.
9. Serre D. Systems of Conservation Laws 1: Hyperbolicity, Entropies, Shock waves. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. -263 p.
10. Монахов В.Н. Дифференциальные уравнения математической физики: курс лекций / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2001. - 154 с.

## II. Геофизическая гидродинамика

Основные уравнения геофизической гидродинамики. Уравнения сохранения массы. Уравнения движения. Понятия внутренней энергии и энтропии. Уравнения притока тепла и соли.

Перевод уравнений во вращающуюся с Землей систему координат Основные понятия. Относительный и абсолютный вихрь. Вихревая трубка.

Циркуляция. Уравнение изменения циркуляции. Теорема Кельвина.

Уравнение вихря. Механизмы изменения относительного вихря.

Потенциальный вихрь. Уравнение Эртеля. Теорема о сохранении потенциального вихря.

Термический ветер. Теорема Тейлора-Праудмена.

Основные упрощающие приближения. Приближение Буссинеска. Линейное приближение.

Приближение бета-плоскости. Гидростатическое приближение.

Волновые движения в океане и атмосфере. Гармонический анализ. Разделение переменных.

Анализ V и N задач. Основные типы волн.

Волны Россби. Береговые и экваториальные волны Кельвина.

Пограничные слои в геофизической гидродинамике. Безразмерный вид уравнений геофизической гидродинамики. Анализ безразмерных параметров.

Задача о поверхностном пограничном слое. Задача Экмана. Западная интенсификация течений. Задача Стоммела.

Инвизионный пограничный слой. Задача Фофонова.

Термический пограничный слой. Проблема термоклина.

1. Дж. Педлоски. Геофизическая гидродинамика. М. Мир. 1984.
2. Ле Блон П., Майзек Л. Волны в океане.. М. Мир. 1981.
3. Монин А.С. Геофизическая гидродинамика. М.Наука. 1989.
4. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. Мю,»Мир»б 1986.

5. Должанский Ф.В. Лекции по геофизической гидродинамике. М., ИВМ РАН, 378 с, 2006.

### **III. Современные методы вычислительной математики**

Метод адаптивных сеток для решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Погрешность аппроксимации на неравномерной сетке. Общие принципы построения конечно-разностных схем на адаптивных сетках.

Метод эквираспределения для построения адаптивных подвижных сеток в одномерных задачах. Схема предиктор-корректор на неравномерной подвижной сетке для одномерного линейного уравнения переноса. Свойства схемы. Геометрический закон сохранения и дивергентные схемы на подвижной сетке.

Понятие о криволинейной сетке в многомерной области. Алгебраические методы построения сеток.

Дифференциальные методы построения адаптивных сеток и их численная реализация. Конечно-разностная схема на адаптивной сетке для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Интегро-интерполяционный метод получения разностных уравнений. Свойства разностного оператора. Смешанные краевые условия.

Разностные схемы на равномерных и адаптивных сетках для уравнений мелкой воды.

Исследование линеаризованных схем. Аппроксимация и устойчивость.

Система уравнений газовой динамики с одной пространственной переменной. Уравнение состояния. Законы сохранения массы, импульса и энергии. Соотношения на разрывах. Линеаризация уравнений. Уравнения акустики с одной пространственной переменной. Схема предиктор-корректор на адаптивной сетке для уравнений акустики. Обобщение схемы для нелинейных уравнений газовой динамики. Противопоточная схема.

Метод конечных элементов для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Энергетическое пространство. Обобщенное решение задачи. Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Метод конечных элементов для нахождения приближенного обобщенного решения.

Триангуляция области. Методы построения неструктурированных треугольных сеток в двумерных областях со сложной геометрией границ.

Метод контрольных объемов. Интегральная форма законов сохранения. Квадратурные формулы. Метод контрольных объемов для уравнения Пуассона. Прикладные задачи для уравнений гидродинамики.

Метод фиктивных областей. Формулировка задачи для области с криволинейной формой границы. Переход к задаче в регулярной области. Особенности итерационных методов. Метод фиктивных областей для задач о течениях идеальной несжимаемой жидкости.

Метод граничных элементов. Интеграл Грина. Вычисление сингулярных интегралов. Граничные элементы. Применение к задачам о течении жидкости со свободной границей.

Спектральные методы. Выбор пробных функций. Получение системы алгебраических уравнений. Быстрое преобразование Фурье. Применение к задачам метеорологии. Численные методы «частицы-в-ячейках». Метод крупных частиц. Два этапа метода крупных частиц. Приложение к задачам волновой гидродинамики. Метод сглаженных частиц (SPH). Определение частиц в методе SPH. Оценка погрешности аппроксимации метода SPH.

Теория TVD-схем. Теоремы о необходимом и достаточном условии монотонности

разностных схем с постоянными и переменными коэффициентами. Современные методы монотонизации численных решений гиперболических уравнений. Схемы на адаптивных сетках, сохраняющие монотонность численного решения. Монотонизация схемы предиктор-корректор для одномерного линейного уравнения переноса. Особенности конструирования неосциллирующих схем для многомерных задач.

Современные алгоритмы ускорения сходимости итерационных процессов. Алгоритмы ускорения сходимости итераций по методу наименьших квадратов.

Вычислительный эксперимент. Общие принципы организации вычислительного эксперимента. Иерархия математических моделей и методы их исследования. Иерархия вычислительных алгоритмов. Точность, устойчивость, экономичность, параллелизуемость численных алгоритмов. Схемы высоких порядков аппроксимации, основанные на методах Рунге-Кутты. Многосеточные методы. Некоторые принципы разработки программ. Проектирование, программирование, отладка, тестирование программ. Приемы обработки результатов расчетов.

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
2. Волков Е.А. Численные методы. СПб.: Лань, 2004.
3. Ковеня В.М. Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэродинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014.
4. Самарский А.А. Введение в численные методы. СПб.: Лань, 2009.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2003.
6. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М.: Физматлит, 2002.
7. Хакимзянов Г.С., Черный С.Г. Методы вычислений: Часть 2. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2005.
8. Хакимзянов Г.С., Черный С.Г. Методы вычислений: Часть 3. Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2008.
9. Хакимзянов Г.С., Черный С.Г. Методы вычислений: Часть 4. Численные методы решения задач для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2014.
10. Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Воронина П.В. Математическое моделирование: Часть 1. Общие принципы математического моделирования. Новосибирск: НГУ, 2010.
11. Хакимзянов Г.С., Шокин Ю.И. Разностные схемы на адаптивных сетках: Часть 1. Задачи для уравнений в частных производных с одной пространственной переменной. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2005.

12. Хакимзянов Г.С., Шокин Ю.И. Разностные схемы на адаптивных сетках. Часть 2: Задачи для уравнений в частных производных с двумя пространственными переменными. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2009.

## VI. Нелинейные задачи механики твердого тела

Введение. Кинематика деформирования. Предмет нелинейной механики деформируемого твердого тела, место в ряду наук, структура, область применения. Система отсчета. Движение сплошной среды. Лагранжевы и эйлеровы координаты. Лагранжев (общий и текущий) и эйлеров подходы к описанию движения сплошной среды. Пространственный, материальный отсчетный и материальный текущий базисы. Вектор перемещений. Закон движения. Тензоры градиентов деформаций и перемещений. Формулы преобразования элементарных отрезков, площадок и объемов из отсчетной в актуальную конфигурацию. Объективные (инвариантные и индифферентные) тензоры. Дифференцирование тензоров по времени. Конвективные и коротационные производные тензоров. Объективные производные тензоров.

Тензоры деформаций. Полярное (мультипликативное) разложение тензора градиента деформации. Правые и левые тензоры деформаций; тензоры деформаций Коши - Грина и Пиолы. Тензоры деформаций семейства Хилла. Тензоры деформаций Грина - Лагранжа и Альманзи. Малые деформации и линейный тензор деформаций.

Объективные производные тензоров деформаций. Тензор скорости деформаций.

Тензоры напряжений. Уравнения движения. Определение тензора напряжений Коши. Тензоры напряжений Коши, Кирхгофа, Пиолы - Кирхгофа. Объективные скорости изменения тензоров во времени. Сопряженные тензоры напряжений и деформаций. Уравнения движения/равновесия в текущей и отсчетной конфигурациях. Уравнения движения/равновесия, записанные относительно скоростей, в текущей и отсчетной конфигурациях

Определяющие соотношения упругости. Три формы записи определяющих соотношений упругого материала в случае бесконечно малых деформаций. Гиперупругость, упругость и гипоупругость. Теорема Нолла.

Слабые формы уравнений движения и вариационные принципы. Слабые формы уравнений движения (равновесия) в текущей и отсчетной конфигурациях. Вариационный принцип Хилла в отсчетной и текущей конфигурациях. Варианты принципа в текущей конфигурации: с использованием производных Трусделла и Хилла в определяющих соотношениях.

Потеря устойчивости и контактные взаимодействия деформируемых тел. Бифуркация решений краевой задачи и собственные состояния. Потеря устойчивости равновесных состояний. Критерии единственности и устойчивости решений краевых задач. Постановка контактной задачи. Формулировка контактной задачи с помощью методов множителей Лагранжа и штрафных функций.

Применение метода конечных элементов к решению нелинейных задач. Векторно-матричная запись слабых форм уравнений и функционалов вариационных принципов для общей лагранжевой и текущей лагранжевой формулировок уравнений. Конечно-элементная дискретизация геометрии и вектора перемещений. Изопараметрические конечные элементы. Дискретизованные уравнения движения/равновесия и методы их решения.

1. Коробейников С.Н. *Нелинейное деформирование твердых тел*. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

2. Димитриенко Ю.И. *Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред. Учебное пособие для вузов.* М.: Изд-во МГТУ, 2011.
3. Седов Л.И. *Введение в механику сплошной среды.* М.: Физматгиз, 1962.
4. Бондарь В.Д. *Основы теории упругости Учебное пособие для вузов.* Новосибирск: Изд-во НГУ, 2004.

## V. Уравнения Навье-Стокса

Общие свойства движения жидкостей. Тензор напряжений. Тензор скоростей деформаций. Интегральные законы сохранения.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости. Понятие о капиллярности. Условия на свободной границе. Постановка основных краевых и начально-краевых задач для уравнений Навье-Стокса.

Основные свойства решений уравнений Навье-Стокса. Энергетическое тождество. Диссипация энергии в вязкой жидкости. Уравнение вихря. Функции тока плоского и осесимметричного течений. Уравнение Гельмгольца.

Групповые свойства уравнений Навье-Стокса. Примеры инвариантных решений.

Диффузия вихревого слоя и вихревой нити. Течение Гамеля-Джеффри и его аналоги. Определения и основные свойства функциональных пространств, применяемых в теории уравнений Навье-Стокса. Неравенство Пуанкаре-Стеклова.

Леммы Ладыженской.

Теоремы вложения и следствия из них.

Внутренняя стационарная задача. Определение обобщенного решения внутренней стационарной задачи. Теорема о восстановлении давления.

Лемма Хопфа. Априорная оценка Лерэ.

Теорема существования решения внутренней стационарной задачи.

Единственность решения внутренней стационарной задачи для медленных течений. Внутренняя нестационарная задача. Определение обобщенного решения внутренней нестационарной задачи по Ладыженской. Теорема единственности.

Теорема существования решения двумерной внутренней нестационарной задачи.

Краевые задачи для системы Стокса.

Тождество Грина для оператора Стокса. Краевые задачи для системы Стокса.

Основы теории гидродинамических потенциалов.

1. П. А. Ананьев, П. К. Волков, А. В. Переверзев Исследование корректности краевых задач для уравнений Навье-Стокса в естественных переменных // Матем. моделирование, 2004, Т. 16 № 7. С. 68-76.
2. О.А. Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.
3. Глушко А.В., Глушко В.П. Специальный курс "Математические модели в гидродинамике": Учебно-методическое пособие. - Воронеж: Изд-во ВГУ, 2004. 39 с.
4. Звягин В.Г., Воротников Д.А. Математические модели ньютоновских жидкостей: Учебное пособие. - Воронеж: Изд-во ВГУ, 2004. - 43 с.
5. В.В. Пухначев Лекции по динамике вязкой несжимаемой жидкости. ч.1. Новосибирск, 1969.

**Вопрос 1.**

Дать кинетическую формулировку задачи Коши для скалярного закона сохранения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{a}(u) = 0, \quad (\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

**Вопрос 2.**

Сформулировать теорему единственности обобщенного решения задачи Стефана.

**Вопрос № 3.**

Три формы записи определяющих соотношений линейной теории упругости и их обобщение для больших деформаций. Формулировка теоремы Нолла.

**Вопрос № 4.**

Формулировка вариационного принципа Хилла для гиперупругой среды.

**Вопрос № 5.**

Дать определение схемы, сохраняющей монотонность численного решения.

Сформулировать теорему о необходимом и достаточном условии сохранения монотонности численного решения разностной схемой с постоянными коэффициентами.

**Вопрос № 6.**

Выписать дифференциальное уравнение метода эквираспределения для построения адаптивной сетки на отрезке и конечно-разностный аналог этого уравнения.

**Вопрос № 7.**

Соленоидальные продолжения. Лемма Хопфа (с формулировкой условий гладкости, при которых она верна).

**Вопрос № 8.**

Начальные условия и условия на твердой границе для системы уравнений Навье-Стокса. Причины практической нереализуемости потенциальных течений в вязкой жидкости.

**Вопрос № 9.**

Дать определение приближения  $\beta$ -плоскости для уравнений геофизической гидродинамики.

**Вопрос № 10.**

Уравнение изменения относительного вихря на вращающейся Земле имеет вид:



$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega}_a \cdot \nabla) \vec{u} - \omega_a (\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{\rho}{\rho^2} \nabla P + \nabla \frac{\vec{F}}{\rho} \quad (1)$$

Здесь  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$  - относительный вихрь скорости  $\vec{u}$ ,  $\vec{\omega}_a = \vec{\omega} + 2\vec{\Omega}$  - абсолютный вихрь,  $P$  - давление,  $\rho$  - плотность,  $\vec{F}$  - сила вязкости.

Сформулировать механизмы четырех основных источников изменения вихря в правой части уравнения (1).

### Задача 1.

Пусть  $z_j \rightarrow z$  сильно в  $L^2(\Omega)$  при  $j \rightarrow \infty$ ,  $\Omega$  — ограниченная область с гладкой границей. Найти меру Янга, порождаемую последовательностью  $\{z_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots$

### Задача № 2.

Пусть осевая линия стержня после одноосного деформирования совпадает с осью «х» декартовой системы координат. Затем стержень повернули так, что его осевая линия стала совпадать с осью «у» этой же системы координат. Как изменятся компоненты тензора напряжений Коши и второго тензора напряжений Пиола – Кирхгофа после поворота?

### Задача № 3.

Определить порядок аппроксимации схемы Лакса-Вендроффа, построенной для уравнения переноса

$$u_t + au_x = 0, \quad a = \text{const}.$$

С помощью спектрального метода Неймана вывести необходимое условие устойчивости схемы Лакса-Вендроффа.

Доказать, что схема Лакса-Вендроффа не сохраняет монотонность численного решения.

### Задача № 4.

Доказать, что для всякой гладкой финитной в  $G \subset \mathbb{R}^2$  функции  $u$  имеет место оценка

$$\|u\|_{L_4(G)} \leq C \left[ \left( \int_G u^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_G |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \right], \quad \text{где } C = \text{const}.$$

### Задача № 5.

Уравнение изменения циркуляции жидкости на вращающейся Земле имеет вид:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C (2\vec{\Omega} \times \vec{u}) \cdot d\vec{r} - \oint_C \frac{\text{grad } P}{\rho} \cdot d\vec{r} \quad (1)$$

Здесь  $\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r}$  - циркуляция скорости  $\vec{u}$  по замкнутому контуру  $C$ , окружающую площадку  $A$ ,  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки на контуре  $C$ . Доказать, при каких условиях на давление и плотность единственным источником изменения циркуляции будет вращение Земли.