

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ)**

Аннотации курсов по выбору обучающихся

Направление подготовки

**010100 – Математика**

Квалификация (степень) выпускника

**Магистр**

Форма обучения

**Очная**

Новосибирск 2014

## **Оглавление**

<b>ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА АЛЬТЕРНАТИВНЫХ КУРСОВ.....</b>	<b>3</b>
<b>КУРСЫ КАФЕДРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.....</b>	<b>14</b>
<b>КУРСЫ КАФЕДРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.....</b>	<b>44</b>
<b>КУРСЫ КАФЕДРЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ .....</b>	<b>69</b>
<b>КУРСЫ КАФЕДРЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ .....</b>	<b>96</b>
<b>КУРСЫ КАФЕДРЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ.....</b>	<b>111</b>

## Общая характеристика альтернативных курсов

Курсы по выбору обучающихся (альтернативные курсы) входят в вариативную часть блока «Дисциплины (модули)» ООП магистратуры по направлению 010100 – Математика.

Альтернативные курсы профессиональной направленности изучаются студентами магистратуры на кафедрах специализации. Учебным планом предусмотрено посещение трех годовых спецкурсов трудоемкости 4 зачетные единицы в течение всего срока магистратуры. Допускается посещение разбиение годовых спецкурсов на полугодовые. Спецкурсы направлены на развитие компетенций ОК-4, ОК-5, ОК-10, ПК-1, ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-5, ПК-6. Форма промежуточной аттестации – экзамен.

Кроме того, каждый студент магистратуры должен посещать научный семинар по тематике исследований в течение всего срока обучения в магистратуре, итого: 2 годовых спецсеминара, трудоемкость 8 зачетных единиц, направлен на развитие компетенций ОК-1, ОК-2, ОК-3, ОК-4, ОК-5, ОК-10, ПК-1, ПК-2, ПК-4, ПК-5, ПК-6. Форма промежуточной аттестации – зачет в конце каждого семестра.

Выбор спецкурсов и спецсеминаров осуществляется студентом в согласовании с научным руководителем и руководством кафедры.

Студенты могут посещать альтернативные курсы в объемах, превышающих указанные в учебном плане. Дисциплины (разделы дисциплин), прослушанные и сданные сверх плана засчитываются в качестве факультативов.

# Курсы кафедры геометрии и топологии

## **Алгебраическая топология.**

Автор: д.ф.-м.н. Базайкин Я.В.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с гомотопической топологией, теорией гомологий, топологией клеточных комплексов и многообразий. Первая часть курса содержит базовые понятия общей топологии, определение и свойства фундаментальной группы, теорема Ван Кампена, точная последовательность расслоения, теорема Фрейдентала, пространства Эйленберга-Маклейна. Вторая часть содержит определения разных гомологий и когомологий, доказательство их эквивалентности, двойственность Пуанкаре, мультипликативные структуры на когомологиях, спектральную последовательность.

### Тематический план курса:

1. Топология. Непрерывное отображение. Понятие функтора, примеры топологических инвариантов: число компонент связности, фундаментальная группа.
2. Фундаментальная группа, ее определение и свойства. Фундаментальная группа окружности, теорема Брауэра о неподвижной точке.
3. Накрытия. Теорема о накрывающей гомотопии. Накрытие и фундаментальная группа. Универсальные накрытия, существование универсальных накрытий. Регулярные накрытия и действия групп.
4. Высшие гомотопические группы, их свойства. Высшие гомотопические группы и накрытия. Относительные гомотопические группы.
5. Локально тривиальные расслоения. Теорема о накрывающей гомотопии. Лемма Фельдбау. Расслоения в смысле Серра. Точная гомотопическая последовательность расслоения
6. Умножение Уайтхеда в гомотопических группах. Теорема Фрейдентала о надстройке.  $n$ -Мерная гомотопическая группа  $n$ -мерной сферы.
7. Слабая и сильная гомотопическая эквивалентности. Теорема Уайтхеда.
8. Комплекс сингулярных цепей. Сингулярные гомологии, их гомотопическая инвариантность.
9. Относительные группы гомологий. Точная последовательность пары, тройки. Последовательность Майера-Виеториса.
10. Клеточный и симплициальный комплексы, клеточные и симплициальные (относительные) гомологии. Совпадение клеточных и сингулярных гомологий.
11. Когомологии. Умножение в когомологиях.
12. Формула Кюннета, формула универсальных коэффициентов.
13. Гомологии и многообразия, степень отображения, индекс пересечения, коэффициент зацепления.
14. Теория препятствий

15. Спектральная последовательность Лере, спектральная последовательность расслоения.
16. Умножение в спектральной последовательности расслоения, трансгрессия, некоторые приложения.

### **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.**

#### Экзаменационные темы

1. Топология. Непрерывное отображение. Понятие функтора, примеры топологических инвариантов: число компонент связности, фундаментальная группа.
2. Фундаментальная группа, ее определение и свойства.
3. Фундаментальная группа окружности, теорема Брауэра о неподвижной точке.
4. Накрытия. Теорема о накрывающей гомотопии.
5. Накрытие и фундаментальная группа.
6. Универсальные накрытия, существование универсальных накрытий.
7. Регулярные накрытия и действия групп.
8. Высшие гомотопические группы, их свойства. Высшие гомотопические группы и накрытия.
9. Относительные гомотопические группы.
10. Локально тривиальные расслоения. Теорема о накрывающей гомотопии. Лемма Фельдбау.
11. Расслоения в смысле Серра. Точная гомотопическая последовательность расслоения.
12. Умножение Уайтхеда в гомотопических группах.
13. Теорема Фрейденталя о надстройке.  $n$ -Мерная гомотопическая группа  $n$ -мерной сферы.
14. Слабая и сильная гомотопическая эквивалентности. Теорема Уайтхеда.
15. Комплекс сингулярных цепей. Сингулярные гомологии, их гомотопическая инвариантность.
16. Относительные группы гомологий. Точная последовательность пары, тройки.
17. Последовательность Майера-Виеториса.
18. Клеточный и симплициальный комплексы, клеточные и симплициальные (относительные) гомологии. Совпадение клеточных и сингулярных гомологий.
19. Когомологии. Умножение в когомологиях.
20. Формула Кюннета.
21. Формула универсальных коэффициентов.
22. Гомологии и многообразия, степень отображения, индекс пересечения, коэффициент зацепления.
23. Теория препятствий.
24. Спектральная последовательность Лере.
25. Спектральная последовательность расслоения.
26. Умножение в спектральной последовательности расслоения.

27. Трансгрессия, некоторые приложения.

**Список литературы**

а) основная:

1. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. *Курс гомотопической топологии.* – М.: Наука, 1989.

б) дополнительная:

1. Новиков С.П., Тайманов И.А. *Современные геометрические структуры и поля.* – М.: МЦНМО, 2005.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия.* Переработанное издание. Том 2. – М.: Изд-во Эдиториал УРСС, 1998.

## **Вычислительная топология.**

Автор: д.ф.-м.н. Базайкин Я.В.

Основная цель курса – сформировать у слушателей понятие о современных методах вычислительной топологии (, такими как: симплициальные комплексы, кубические комплексы, их гомологии; алгоритмы их вычисления, в том числе рекурсивные; персистентные гомологии) и сферах их применения в практической деятельности.

### Содержание курса:

1. Понятие о клеточном, симплициальном, кубическом комплексах. Клеточные гомологии, симплициальные гомологии, кубические гомологии, их инвариантность, гомотопические свойства. Когомологии, группы гомологий и когомологий с коэффициентами. Числа Бетти, эйлерова характеристика. Примеры.
2. Нерв топологического пространства, топологические характеристики пространства через покрытия. Когомологии Чеха, их свойства.
3. Алгоритмы вычисления цепных комплексов, матриц инцидентности, чисел Бетти, групп гомологий и когомологий симплициальных и кубических комплексов. Роль кольца коэффициентов при алгоритмических вычислениях.
4. Топологическая характеристика множеств, заданных массивами случайных выборок: комплекс Чеха, комплекс Виеториса-Рипса. Алгоритмы вычисления чисел Бетти.
5. Семейства топологических пространств, заданные рекурсией (cutoff), примеры. Устойчивые гомологии (persistent homology), алгоритмы их вычисления, удаление «топологического шума».
6. Понятие о теории Морса на конечномерных многообразиях. Функции Морса, критические точки, градиентные поля, основная теорема теории Морса. Теория Морса на многообразиях с краем.
7. Дискретная теория Морса. Критические точки, определение индекса критической точки. Точки бифуркации. Применение для эффективных вычислений чисел Бетти.
8. Теория Морса по Форману. Понятие Морсовской функции по Форману, критические точки, градиентные поля, основная теорема. Применения.

### **Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

Пример вопросов для проведения зачета:

1. Вычислить группу гомологий тора, проективной плоскости, бутылки Клейна.
2. Построить персистентную диаграмму фильтрации, заданной простейшей функцией от одной переменной.
3. Построить персистентную диаграмму фильтрации, заданной простейшей функцией от двух переменных.

4. Построить персистентные диаграммы облака точек.
5. Реализовать алгоритмы вычисления числа компонент связности.
6. Определить критические точки простейшей дискретной функции Морса на кубическом комплексе.

### **Список литературы**

а) основная литература:

[1] H. Edelsbrunner and J. Harer. Computational Topology. An Introduction. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2010.

б) дополнительная литература

[1] Afra J. Zomorodian. Topology for Computing. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. 2010.

## **Трехмерные гиперболические многообразия и орбифолды**

Автор: чл.-корр. РАН Веснин А.Ю.

В теории трехмерных многообразий ключевым является класс многообразий, допускающих введение гиперболической геометрической структуры. Исследование трехмерных гиперболических многообразий предполагает сочетание геометрических, топологических и алгебраических методов. В рамках курса будет доказана теорема о фундаментальном многограннике, дающая представление фундаментальной группы; будут выведены формулы для объемов тетраэдров и других многогранников в пространстве Лобачевского, а также, для объемов некоторых многообразий и орбифолдов; будут приведены примеры построения гиперболических структур на дополнениях к узлам и зацеплениям. Будет описана структура множества объемом трехмерных гиперболических многообразий и установлены свойства этого множества.

### Содержание курса:

1. Линейно связные пространства, гомотопия путей, фундаментальная группа пространства, фундаментальная группа окружности.
2. Порождающие и соотношения в группах. Амальгама.
3. Теорема Зейферта – ван Кампена.
4. Фундаментальная группа поверхности.
5. Фундаментальная группа дополнений к узлам и зацеплений.
6. Группа классов отображений. Разбиение Хегора. Диаграмма Хегора.
7. Многообразия хегорова рода 0 и 1. Линзовые пространства.
8. Эквивалентность диаграмм Хегора. Род Хегора многообразия.
9. Многообразия Данвуди и их свойства.
10. Конические особенности преобразованием многообразий. Теорема Зейферта – Трельфалля. Построение многообразий из многогранников.
11. Линзовые пространства как результат склеивания многогранников.
12. Перестройки вдоль узлов и зацеплений. Преобразования Кирби.
13. Построения многообразий перестройками. Примеры.
14. Кристаллизации трехмерных многообразий. Эквивалентность кристаллизаций.
15. Задание многообразий спайнами.
16. Инварианты трехмерных многообразий.
17. Трехмерные многообразия как разветвленные накрытия трехмерной сферы.

### **Вопросы, выносятся на экзамен:**

1. Линейно связные пространства, гомотопия путей, фундаментальная группа пространства.
2. Фундаментальная группа окружности.
3. Свободные группы. Порождающие и соотношения в группах. Амальгамное произведение групп.
4. Теорема Зейферта – ван Кампена.
5. Фундаментальная группа поверхности.

6. Узлы и зацепления в трехмерной сфере. Фундаментальная группа дополнений к узлам и зацеплениям.
7. Группа классов отображений поверхности.
8. Разбиение Хегора. Диаграмма Хегора.
9. Род Хегора многообразия. Многообразия хегорова рода 0 и 1.
10. Диаграммы Хегора линзовых пространств.
11. Эквивалентность диаграмм Хегора. Преобразования Зингера.
12. Многообразия Данудии и их свойства.
13. Построение многообразий из многогранников. Конические особенности псевдомногообразий. Теорема Зейферта – Трельфалля.
14. Линзовые пространства как результат склеивания многогранников.
15. Перестройки вдоль узлов и зацеплений. Преобразования Кирби.
16. Построение многообразий перестройками. Примеры.
17. Кристаллиции трехмерных многообразий. Примеры.
18. Эквивалентность кристаллизаций.
19. Задание многообразий спайнами.
20. Инварианты трехмерных многообразий.
21. Трехмерные многообразия как разветвленные накрытия трехмерной сферы.
22. Топология многообразий и их геометризация.

#### **Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:**

Основная литература:

[1] Матвеев С.В., Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий. М.: МЦНМО, 2007. 456 с.

Дополнительная литература:

[2] Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005.

[3] Зейферт Т., Трельфалль В. Топология. ГОНТИ 1938.

[4] Тёрстон У., Трехмерная геометрия и топология, М. 2001.

## **Геометрия, топология и их приложения (семинар).**

Руководитель: акад. РАН Тайманов И.А.

Семинар носит исследовательский характер и посвящен изложению текущих результатов исследований в области геометрии, топологии и их приложениях авторами результатов, а также обзорам современных достижений ведущих специалистов. Ниже приведен адрес сайта семинара

**<http://math.nsc.ru/~taimanov/seminar/ru/>**

## **Инварианты трехмерных многообразий (семинар)**

Руководитель: чл.-корр. РАН А.Ю. Веснин.

Научно-исследовательский семинар посвящен теории трехмерных многообразий. Среди основных вопросов, обсуждаемых на семинаре:

- геометризация трехмерных многообразий и инварианты геометрических структур;
- инварианты узлов и зацеплений в трехмерной сфере и других трехмерных многообразиях;
- инварианты пространственных графов;
- объемы и спектры длин трехмерных гиперболических многообразий;
- действие групп на трехмерных многообразиях, группы изометрий многообразий, орбифолды;

На семинаре докладываются оригинальные работы участников семинара (в том числе, преподавателей, аспирантов и магистрантов кафедры геометрии и топологии и кафедры теории функций), а также, реферируются статьи по тематике семинара.

Литература:

1. Сосинский, А. Б. Узлы и косы. — М.: МЦНМО, 2001.
2. Кокстер Г.С.М. Неевклидова геометрия, 1969.

## **Интегрируемые системы (семинар)**

Руководитель: д.ф.-м.н. А.Е. Миронов.

Научно-исследовательский семинар посвящен теории интегрируемых систем и их приложениям в геометрии. Среди основных вопросов, обсуждаемых на семинаре:

- теория солитонов;
- конечнозонные решения солитонных уравнений;
- геодезические на поверхностях;
- преобразования Дарбу и Мутара операторов Шредингера;
- гамильтоновы системы;
- методы обратной задачи рассеяния.

Литература:

1. В.И. Арнольд. Математические методы классической механики, 1989.
2. Мозер Ю. Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория, 1999.
3. А.В. Борисов, И.С. Мамаев. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике.
4. Я.Г. Синай. Современные проблемы эргодической теории.

# Курсы кафедры дифференциальных уравнений

## Уравнения математической физики – 2

Лектор: д.ф.-м.н., проф. Д.С. Аниконов.

Дисциплина «Уравнения математической физики - 2» предназначена для студентов четвертого и пятого курсов механико-математических факультетов университетов, а также для магистрантов. Основной целью освоения дисциплины является изучение студентами теории обобщенных функций (распределений по Шварцу), что необходимо для специалистов по дифференциальным уравнениям. По окончании изучения указанной дисциплины студент должен

- иметь представление о месте и роли изучаемой дисциплины среди других наук;
- знать содержание программы дисциплины,
- уметь определять применимость определенных методов для решения конкретных задач;
- получить навыки самостоятельной работы для успешного выполнения выпускных работ бакалавра и магистра.

Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрен экзамен в конце года. Текущий контроль. В течение года выполняются самостоятельные задания, четыре контрольные работы и два коллоквиума. Выполнение указанных видов работ является обязательным для всех студентов.

### Содержание дисциплины.

1. Введение. Актуальность проблемы расширения понятия классического решения дифференциальных уравнений.
2. Предварительные сведения и обозначения.
3. Основные финитные, бесконечно-дифференцируемые функции. Теорема о разложении единицы.
4. Пространство обобщенных функций и его основные свойства.
5. Носитель обобщенной функции.
6. Формулы Сохотского.
7. Замена переменных и умножение обобщенных функций.
8. Дифференцирование обобщенных функций.
9. Первообразная обобщенной функции
10. Примеры обобщенных функций.
11. Прямое произведение обобщенных функций.
12. Свертка обобщенных функций.
13. Регуляризация обобщенных функций.
14. Применение обобщенных функций в теории дифференциальных уравнений.
15. Пространство основных быстро убывающих функций.
16. Обобщенные функции медленного роста.

17. Прямое произведение обобщенных функций медленного роста.
18. Свертка обобщенных функций медленного роста.
19. Преобразование Фурье основных быстро убывающих функций.
20. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста.
21. Преобразование Фурье свертки обобщенных функций медленного роста
22. Построение фундаментальных решений дифференциальных уравнений.

### **Учебно-методическое обеспечение дисциплины.**

Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы.

1. Основные финитные, бесконечно-дифференцируемые функции.
2. Теорема о разложении единицы.
3. Пространство обобщенных функций.
4. Носитель обобщенной функции.
5. Первая и вторая формулы Сохотского.
6. Замена переменных в обобщенных функциях.
7. Умножение обобщенных функций.
8. Дифференцирование обобщенных функций.
9. Первообразная обобщенной функции
10. Прямое произведение обобщенных функций.
11. Свертка обобщенных функций.
12. Регуляризация обобщенных функций.
13. Алгебра обобщенных функций.
14. Дробное дифференцирование.
15. Пространство основных быстро убывающих функций.
16. Обобщенные функции медленного роста.
17. Прямое произведение обобщенных функций медленного роста.
18. Свертка обобщенных функций медленного роста.
19. Условия существования свертки обобщенных функций медленного роста.
20. Преобразование Фурье основных быстро убывающих функций.
21. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста.
22. Преобразование Фурье свертки обобщенных функций медленного роста
23. Построение фундаментального решения оператора Лапласа.
24. Построение фундаментального решения для волнового уравнения.
25. Построение фундаментального решения для уравнения теплопроводности.

Образцы вопросов для подготовки к экзамену.

1. Основные финитные, бесконечно-дифференцируемые функции.
2. Теорема о разложении единицы.
3. Пространство обобщенных функций.
4. Носитель обобщенной функции.
5. Первая и вторая формулы Сохотского.
6. Замена переменных в обобщенных функциях.
7. Умножение обобщенных функций.

8. Дифференцирование обобщенных функций.
9. Первообразная обобщенной функции
10. Прямое произведение обобщенных функций.
11. Свертка обобщенных функций.
12. Регуляризация обобщенных функций.
13. Алгебра обобщенных функций.
15. Дробное дифференцирование.
15. Пространство основных быстро убывающих функций.
16. Обобщенные функции медленного роста.
17. Прямое произведение обобщенных функций медленного роста.
18. Свертка обобщенных функций медленного роста.
19. Условия существования свертки обобщенных функций медленного роста.
20. Преобразование Фурье основных быстро убывающих функций.
21. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста.
22. Преобразование Фурье свертки обобщенных функций медленного роста
23. Построение фундаментального решения оператора Лапласа.
24. Построение фундаментального решения оператора Даламбера.
25. Построение фундаментального решения для уравнения теплопроводности.

**Список основной и дополнительной литературы:**

1. В.С. Владимиров Уравнения математической физики, Москва, изд. Наука, 1976.
2. В.С. Владимиров Обобщенные функции в математической физике, Москва, изд. Наука, 1976.
3. В.С. Владимиров, В.В. Жариков Уравнения математической физики, Москва, изд. Физматлит, 2000.
4. А. Н. Колмогоров, С.В. Фомин Элементы теории функций и функционального анализа, Москва, изд. Наука, 1972.
5. Л. Хермандер линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва, изд. Мир, 1965.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. Москва, изд. Наука, 1965.

## Уравнения с частными производными II

Автор: Демиденко Геннадий Владимирович, д.ф.-м.н., профессор ММФ НГУ.

Курс ставит своими целями изучение классических результатов теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными произвольного порядка, получение некоторых сведений о ее современных аспектах и овладении методами решения краевых задач для различных типов уравнений и систем.

В первой части курса излагаются некоторые сведения из современного математического анализа, необходимые для изучения основных разделов лекционного курса. В частности, изучаются свойства операторов Фурье и Лапласа, даются различные интегральные представления суммируемых функций, излагаются основные результаты из теории соболевских пространств, формулируются теоремы о мультипликаторах, дается введение в теорию псевдодифференциальных операторов.

Во второй части курса излагаются результаты о корректности задачи Коши для строго гиперболических уравнений произвольного порядка и симметрических гиперболических систем. Доказывается формула Соболева решения задачи Коши для волнового уравнения с переменными коэффициентами.

В третьей части курса излагается теория краевых задач для эллиптических уравнений и систем. В частности, доказывается теорема о нетеровости.

В четвертой части курса излагается теория краевых задач для параболических уравнений.

В пятой части курса изучаются свойства квазиэллиптических операторов. В частности, доказываются теоремы об изоморфизме в специальных шкалах весовых соболевских пространств, а также устанавливаются теоремы о разрешимости краевых задач в полупространстве для квазиэллиптических уравнений.

### Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

На лекциях формулируется ряд теорем, доказательства которых магистранты должны изучить самостоятельно, используя рекомендуемую литературу.

В течение учебного года магистрантам предлагаются упражнения исследовательского характера. Полученное в процессе самостоятельной работы решение магистранты рассказывают лектору во время консультаций. Ниже прилагаются образцы упражнений для самостоятельной работы.

1. Пусть ПДО  $A$  и  $B$  имеют порядки  $m$  и  $l$ . Доказать, что коммутатор  $B \circ A - A \circ B$  является линейным непрерывным оператором из  $W_2^{s+m+l}(R_n)$  в  $W_2^{s+1}(R_n)$ .
2. Указать условия разрешимости полигармонического уравнения  $\Delta^m u = f(x)$ ,  $x \in R_n$ , в соболевском пространстве  $W_2^{2m}(R_n)$ .
3. Построить параметрикс Леви для начальной задачи для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t - a(x)\Delta u = 0, & t > 0, \quad x \in R_n, \\ u|_{t=0} = u_0(x). \end{cases}$$

4. Построить решение задачи Коши для уравнения Клейна-Гордона-Фока:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m(x)u = 0, & t > 0, \quad x \in R_n, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \\ u_t|_{t=0} = u_1(x). \end{cases}$$

Для контроля усвоения лекционного материала предусмотрен экзамен по окончании курса. Ниже прилагаются образцы вопросов для подготовки к экзамену.

1. Теорема Реллиха.
2. Интегральное представление решения квазиэллиптического уравнения в  $R_n$ .
3. Регуляризаторы краевых задач для эллиптических уравнений в полупространстве.
4. Задача Коши для волнового уравнения с переменным коэффициентом.

### **Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

а) основная литература:

1. Арнольд В.И. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: ФАЗИС, 1999.
2. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
3. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной старшей частью. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
4. Демиденко Г.В. Введение в теорию соболевских пространств. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1995.
5. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
6. Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М.: Наука, 1984.
7. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
8. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
9. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
10. Соболев С.Л. Избранные труды. Т. II. Функциональный анализ. Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Академическое изд-во «Гео», 2006.
11. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2001.
12. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.

13. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. М.: Мир, 1986-1988. Т. 1, 1986; Т. 2, 1986; Т. 3, 1987; Т. 4, 1988.
14. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. Университетская серия; Т. 7. Новосибирск, 2003.

б) дополнительная литература:

1. Крылов Н.В. Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М: Мир, 1964.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1, 2. М.: Гостехиздат, 1951.
4. Лере Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
5. Нагумо М. Лекции по современной теории уравнений в частных производных. М.: Мир, 1967.
6. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М: Изд-во МГУ; Наука, 2004
7. Соболев С.Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. М.: Наука, 1989.
8. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. М. Мир, 1985.
9. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
10. Харди Г.Г., Литлвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. М.: КомКнига, 2006.
11. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Добросвет, 2005.
12. Krylov N.V. Lectures on elliptic and parabolic equations in Sobolev spaces. Graduate Studies in Mathematics 96. Providence, RI: American Mathematical Society, 2008.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

1. Интернет-библиотека Мира математических уравнений. Раздел: Уравнения математической физики, дифференциальные уравнения с частными производными. URL: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
2. Интернет-библиотека Мира математических уравнений. Раздел: Обыкновенные дифференциальные уравнения. URL: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>
3. Интернет-библиотека Мира математических уравнений. Раздел: Математический анализ, функциональный анализ. URL: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>
4. Интернет-библиотека Московского центра непрерывного математического образования. URL: <http://www.mccme.ru/free-books/>

## **Избранные вопросы математического анализа (семинар)**

Руководитель: д.ф.-м.н., профессор Г.В. Демиденко

Семинар «Избранные вопросы математического анализа» кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета Новосибирского государственного университета (ММФ НГУ) осуществляет свою деятельность более 20 лет. В рамках семинара разбираются классические и современные работы в области дифференциальных уравнений, разностных уравнений, уравнений с запаздывающим аргументом и их приложений. На семинаре студентами, магистрантами, аспирантами и преподавателями НГУ, а также научными сотрудниками Института ННЦ докладываются полученные результаты, в том числе в процессе работы над квалификационными работами, магистерскими, кандидатскими и докторскими диссертациями.

Семинар предназначен для студентов, магистрантов, аспирантов и преподавателей НГУ, в чьей учебной, педагогической и научной деятельности возникает необходимость в изучении различных аспектов классического и современного математического анализа, теории дифференциальных уравнений, разностных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом.

Продолжительность семинара: учебный год (2 семестра).

Для студентов и магистрантов, специализирующихся на кафедре дифференциальных уравнений ММФ НГУ, участие в работе семинара является обязательным. Итоговой формой контроля является зачет по окончании каждого семестра.

Участие в работе семинаров способствует развитию у студентов, магистрантов и аспирантов навыков публичных выступлений и участия в дискуссиях. Оно является действенной формой формирования профессиональных компетенций, связанных в первую очередь с научно-исследовательской деятельностью. К работе семинара привлекаются специалисты в области дифференциальных уравнений, разностных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом. Во время выступлений докладчику задаются вопросы, ответы на которые иногда требуют проведения самостоятельных исследований и знакомства с дополнительными материалами. Такая практика формирует у студентов, магистрантов и аспирантов умение работы с литературными источниками, развивает навыки проведения научных исследований, что является очень важным для подготовки будущих научных кадров.

## **Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.**

Лектор: д.ф.-м.н., проф. С.И. Фадеев.

Дисциплина “ Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений” предназначена для студентов механико-математических факультетов и студентов других факультетов, изучающих естественно-научные дисциплины. Целью с./курса является знакомство студентов с исследованием нелинейных краевых задач методами продолжения по параметру, что играет важную роль при моделировании многих физических процессов в различных приложениях. При этом используются разделы курса лекций по “Теории обыкновенных дифференциальных уравнений”, читаемых студентам второго курса механико-математического факультета, в частности, раздел по теории линейных краевых задач.

Для достижения поставленной цели в годовой спец. курс включено описание пакетов программ «STEP» и «BPR-Q», разработанных в Институте математики им. С.Л.Соболева СО РАН, предназначенных для численного исследования в зависимости от параметров систем нелинейных уравнений и нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также результаты численного исследования математических моделей, используемых при описании стационарных каталитических процессов, и автоколебаний.

По окончании изучения указанной дисциплины студент должен

- иметь представление о месте и роли изучаемой дисциплины среди других наук;
- знать содержание программы с./курса, формулировки задач и определения, иметь практические навыки анализа конкретных задач.

Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрен экзамен в конце 2-го семестра.

### Содержание дисциплины.

**Введение.** О структуре годового спец. курса. Сведения о системах обыкновенных дифференциальных уравнений (задачи Коши, линейные краевые задачи), излагаемые в первом семестре, как основа теории и алгоритмов численного исследования нелинейных проблем (нелинейные краевые задачи, системы конечных нелинейных уравнений, представляющих дискретные модели нелинейных краевых задач), излагаемых во втором семестре. Важность изучения зависимости решения от параметров приложениях.

### **Раздел 1. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами.**

**Тема 1.** Однородные системы дифференциальных уравнений 1-го порядка. Векторное представление задачи Коши. Теорема существования и единственности. Пространство решений однородной системы дифференциальных уравнений. Векторное представление задачи Коши. Некоторые сведения из линейной алгебры и анализа. Норма матрицы и некоторые неравенства, связанные с определением нормы. Краткие сведения о

функциональных рядах. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Пространство решений однородной системы уравнений. Пространство решений однородного дифференциального уравнения высокого порядка.

**Тема 2.** Однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Задача Коши. Матричная экспонента, ее свойства и вычисление с использованием жордановой формы. Примеры построения фундаментальной матрицы решений. Задача Коши для однородной системы уравнений. Матричная экспонента.

**Тема 3.** Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений. Теорема существования и единственности. Метод вариации произвольных постоянных. Формула Коши. Априорная оценка решения. Теорема существования и единственности. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высокого порядка. Априорная оценка решения задачи Коши

## **Раздел 2. Линейные краевые задачи.**

**Тема 1.** Существование и единственность решения краевой задачи. Матричные функции Грина. Различные типы краевых условий. Краевая задача для дифференциального уравнения высокого порядка. Функции Грина. Вводные замечания. Существование и единственность решения краевой задачи. Различные случаи задания краевых условий. Краевые задачи для линейного дифференциального уравнения высокого порядка. Примеры построения функций Грина.

**Тема 2.** Непрерывная зависимость решения краевой задачи от параметров. Возмущенная краевая задача. Теорема о разрешимости возмущенной краевой задачи. Теорема о непрерывной зависимости решения краевой задачи от параметров. Понятие собственных чисел и собственных функций краевой задачи. Возмущенная краевая задача. Непрерывная зависимость решения от параметров. Понятие собственных чисел и собственных функций краевой задачи.

**Тема 3.** Краевая задача на всей числовой прямой для системы уравнений уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами. Теорема существования и единственности, функции Грина. Краевые задачи на полупрямой для системы уравнений и уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами. Условия Лопатинского, функции Грина.

Представление матричной экспоненты в виде матричного полинома. Оценка нормы матричной экспоненты. Краевая задача на всей числовой прямой. Теорема существования и единственности. Матричная функция Грина краевой задачи на всей числовой прямой. Краевая задача на всей числовой прямой для уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами. Краевая задача на полупрямой. Условия Лопатинского. Матричные функции Грина краевой задачи на полупрямой. Краевая задача на полупрямой для уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами. Функция Грина краевой задачи на полупрямой для уравнения высокого порядка.

**Тема 4.** Формальное определение матричной функции Грина как обобщенное

решение краевой задачи для матричного уравнения. Дельта-функция. Физическая интерпретация решения. Пример определения матричной функции Грина краевой задачи на конечном отрезке. Физическая интерпретация функции Грина.

### **Раздел 3. О численных методах решения линейных краевых задач.**

**Тема 1.** Приведение двухточечной краевой задачи к серии задач Коши. Проблема «сплющивания» базисных решений. Метод ортогональной прогонки С.К. Годунова. Серии задач Коши в методе «стрельбы». Проблема «сплющивания» базисных решений. Пример некорректного применения метода стрельбы для решения хорошо обусловленной краевой задачи. Ортогонализация Грама-Шмидта. Метод ортогональной прогонки.

**Тема 2.** Метод множественной стрельбы как вариант ортогональной прогонки. Метод стрельбы и проблема сплющивания базисных решений. Метод множественной стрельбы.

### **Раздел 4. Нелинейные краевые задачи на конечном отрезке.**

**Тема 1.** О численном исследовании решения нелинейной краевой задачи в зависимости от параметров модели. Множественность решений как типичное проявление нелинейности проблемы. Примеры нелинейных краевых задач с точным решением, иллюстрирующих природу множественности решений. Формулировки нелинейных краевых задач. Геометрическая интерпретация. Нелинейные эффекты, как отражение реальных физических процессов, моделируемых краевой задачей. О численном исследовании нелинейных краевых задач. Примеры нелинейных краевых задач, имеющих точное решение, которые иллюстрируют нелинейные эффекты. Множественность решений и петля гистерезиса.

**Тема 2.** Численное решение нелинейных краевых задач методом Ньютона (методом квазилинеаризации). Определение хорошей обусловленности нелинейной краевой задачи. Теорема о сходимости итераций по методу Ньютона. Определение хорошей обусловленности нелинейной краевой задачи. Метод Ньютона. Определение  $\Omega$ -окрестности решения. Квадратичная сходимость итераций.

**Тема 3.** Метод стрельбы и метод множественной стрельбы. Метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений. Дифференцируемость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам. Редукция краевой задачи к системе нелинейных уравнений относительно сеточных значений решения краевой задачи и её решение методом Ньютона. О решении системы нелинейных уравнений методом Ньютона. Дифференцируемость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам. Метод стрельбы. Метод множественной стрельбы.

### **Раздел 5. Численное исследование решения системы нелинейных уравнений в зависимости от параметра.**

**Тема 1.** Системы нелинейных уравнений с параметром. Теорема о неявной

функции. Методы продолжения решения по параметру для построения гладкой пространственной кривой, определяемой системой нелинейных уравнений. Теорема о неявной функции. Применение метода Ньютона при продолжении решения по параметру. Продолжение решения по параметру как задача Коши.

**Тема 2.** Продолжение решения по текущим параметрам для построения гладкой пространственной кривой, содержащий особые точки типа «поворот». Выбор текущего параметра с использованием параметризации. Продолжение решения по длине дуги. Теорема о неявной функции и параметризация. Продолжение решения по текущему параметру. Численное построение интегральной кривой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, представляющей зависимость решения системы нелинейных от параметра. Продолжение решения по длине дуги пространственной кривой, определяемой системой нелинейных уравнений. Метод Кубичека.

## **Раздел 6. Численное исследование решения нелинейных краевых задач. Метод продолжения решения по параметру**

**Тема 1.** Продолжение решения по параметру в методе множественной стрельбы. Система нелинейных уравнений относительно сеточных значений решения, определенная на решениях серии задач Коши. Серия задач Коши, необходимая для реализации метода продолжения по параметру. Продолжение решения по параметру

**Тема 2.** Дискретная модель нелинейной краевой задачи, основанная на сплайн-коллокации. Метод сплайн-коллокации. Формулировка дискретной модели. Адаптация сетки.

**Тема 3.** Дискретные модели нелинейных интегральных уравнений. Примеры представления нелинейной краевой задачи в виде нелинейного интегрального уравнения с использованием функции Грина. Использование интерполяционных кубических сплайнов класса  $C_2$  при формулировке дискретной модели нелинейного интегрального уравнения. Система линейных алгебраических уравнений, определяющая фундаментальные кубические сплайны.

**Тема 4.** Численные примеры. Модель пленочного электростатического реле. Стационарные режимы работы каталитического реактора с кипящим слоем. Краевая задача, описывающая зависимость предельного цикла осциллятора Ван дер Поля от параметра.

**Заключение.** Демонстрация работы комплекса программ на примерах нелинейных краевых задач.

## **Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы.**

Примерный вариант экзаменационных билетов.

### **Билет 1.**

1. Условия, определяющие матричную функцию Грина краевой задачи

$$a \leq x \leq b, \quad \frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \quad Sy(a) + Ty(b) = \varphi.$$

Понятие хорошей обусловленности.

2. Метод множественной стрельбы для решения нелинейной краевой задачи

$$a \leq x \leq b, \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad g(y(a), y(b)) = 0.$$

### Билет 2.

1. Понятие хорошей обусловленности нелинейной краевой задачи

$$a \leq x \leq b, \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad g(y(a), y(b)) = 0.$$

Метод квазилинеаризации (метод Ньютона).

2. Условия, определяющие функцию Грина краевой задачи для уравнения высокого порядка

$$a \leq x \leq b, \quad P(x, \frac{d}{dx})u = \frac{d^n u}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{du}{dx} + p_n(x)u = F(x)$$

$$S \begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \\ \dots \\ u^{(n-2)}(a) \\ u^{(n-1)}(a) \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} u(b) \\ u'(b) \\ \dots \\ u^{(n-2)}(b) \\ u^{(n-1)}(b) \end{bmatrix} = \varphi.$$

Представление нелинейной краевой задачи

$$a \leq x \leq b, \quad P_n(x, \frac{d}{dx})u = F(x, u)$$

$$S \begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \\ \dots \\ u^{(n-2)}(a) \\ u^{(n-1)}(a) \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} u(b) \\ u'(b) \\ \dots \\ u^{(n-2)}(b) \\ u^{(n-1)}(b) \end{bmatrix} = 0,$$

в виде нелинейного интегрального уравнения.

### Билет 3.

1. Условия однозначной разрешимости линейной краевой задачи

$$a \leq x \leq b, \quad \frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \quad Sy(a) + Ty(b) = \varphi.$$

Метод множественной стрельбы.

2. Уравнения для вариаций задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений.

**Билет 4.**

1. Метод ортогональных прогонок С.К.Годунова решения линейной краевой задачи

$$a \leq x \leq b, \quad \frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x),$$

$$Ly(a) = l, \quad Ry(b) = r.$$

2. Метод Кубичека для численного исследования зависимости решения системы нелинейных уравнений с параметром.

**Билет 5.**

1. Использование интерполяционных кубических сплайнов при формулировке дискретной модели нелинейного интегрального уравнения.

$$u(x) = \int_a^b g(x, s) F(s, u(s), q) ds,$$

где  $g(x, s)$  – функция Грина линейной краевой задачи

$$a \leq x \leq b, \quad P(x) \frac{d^n u}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{du}{dx} + p_n(x) u = F(x)$$

$$S \begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \\ \dots \\ u^{(n-2)}(a) \\ u^{(n-1)}(a) \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} u(b) \\ u'(b) \\ \dots \\ u^{(n-2)}(b) \\ u^{(n-1)}(b) \end{bmatrix} = \varphi.$$

2. Метод продолжения решения с параметризацией для численного исследования зависимости решения системы нелинейных уравнений от параметра.

**Билет 6.**

1. Использование метода сплайн-коллокации для построения дискретной модели нелинейной краевой задачи

$$a \leq x \leq b, \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, q), \quad g(y(a), y(b), q) = 0.$$

2. Метод продолжения решения системы нелинейных уравнений по параметру как задача Коши.

**Билет 7.**

1. Различные типы краевых условий линейной краевой задачи

$$a \leq x \leq b, \quad \frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \quad Sy(a) + Ty(b) = \varphi$$

Привести выражения условий, определяющих соответствующие матричные функций Грина.

2. Формулировка краевой задачи, определяющей производную решения краевой

задачи

$$a \leq x \leq b, \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, q), \quad g(y(a), y(b), q) = 0,$$

по параметру  $q$ . Применение метода множественной стрельбы для определения производной решения краевой задачи по параметру  $q$ .

### Билет 8.

1. Определить функцию Грина краевой задачи:

$$0 < x \leq 1, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + F(x) = 0, \quad \frac{du}{dx}(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Далее, записать интегральное представление краевой задачи

$$0 < x \leq 1, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + qe^u = 0, \quad \frac{du}{dx}(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Чем характеризуется зависимость решения краевой задачи от параметра  $q$ ?

2. Теорема о неявной функции и параметризация в методе продолжения по параметру решения системы из  $n$  нелинейных уравнений  $f(x, q) = 0$  при выполнении условия

$$\text{rang} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial f}{\partial q} \right] = n.$$

### Билет 9.

1. Метод стрельбы и метод множественной стрельбы решения краевой задачи

$$a \leq x \leq b, \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad g(y(a), y(b)) = 0.$$

2. Продолжение по параметру решения системы из  $n$  нелинейных уравнений  $f(x, q) = 0$  как задача Коши при выполнении условия

$$\text{rang} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial f}{\partial q} \right] = n.$$

### Билет 10.

1. Понятие «возмущенной» линейной краевой задачи. Теорема о непрерывной зависимости решения линейной краевой задачи от параметров. Использование теоремы в определении  $\Omega$ -окрестности в методе Ньютона (квазилинеаризации) для решения нелинейной краевой задачи.

2. Примеры физической интерпретации множественности решения нелинейной краевой задачи с параметром.

### Список основной и дополнительной литературы.

1. Годунов С.К., Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Издательство НГУ, 1994.-Т.1: Краевые задачи.- 264 с.
2. Бахвалов Н.С., Численные методы, Москва, Наука, 1975, 632 с.
3. Бибииков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Ленинград, ЛГУ, 1981, 232 с.

4. Федорук М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва, Наука, 1985, 448 с.
5. Фадеев С.И., Методические указания к курсу « Обыкновенные дифференциальные уравнения» , Новосибирск, НГУ, 1986, 26 с.
6. Фадеев С.И., Линейные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений на конечном отрезке, Методические указания , Новосибирск, НГУ, 1995, 34 с.
7. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М., Методы анализа нелинейных динамических моделей, Москва , Мир, 1991, 368 с.
8. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л., Методы сплайн-функций, Москва, Наука, 1980, 352 с
9. Фадеев С.И., Покровская С.А., Березин А.Ю., Гайнова И.А. Пакет программ STER для численного исследования систем нелинейных уравнений и автономных систем общего вида. Новосибирск, НГУ, 1998г., 188 стр.
10. Фадеев С.И., Программа численного решения нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром.// Вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск, Наука, Сибирское отделение, 1990, с.104-200.
11. В.В.Когай, С.И.Фадеев. Применение продолжения по параметру на основе метода множественной стрельбы для численного исследования нелинейных краевых задач. // Сибирский журнал индустриальной математики, т. 4, N 1(7), (2001), с.с. 83-101.
12. Фадеев С.И., Когай В.В., Нелинейные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений на конечном отрезке. Учебное пособие./НГУ, Новосибирск, 2008,104 с.

## Специальные функции и элементы аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений

Автор: Кожанов Александр Иванович, д.ф.-м.н., профессор ММФ НГУ

Курс ставит своей целью изучение классических результатов теории специальных функций, специальных дифференциальных уравнений, а также сведений о современных аспектах теории неклассических дифференциальных уравнений.

В первой части курса излагаются некоторые сведения из функционального анализа, необходимые для изучения основных разделов лекционного курса. В частности, излагаются некоторые сведения из теории гильбертовых пространств (ряды Фурье в гильбертовом пространстве, теорема Рисса, теорема Гильберта-Шмидта), изучаются свойства обобщенных производных.

Во второй части курса излагаются классические результаты о свойствах основных специальных функций (функций Бесселя, Неймана и других), изучаются свойства классических ортогональных многочленов.

В третьей части курса излагается теория краевых задач для неклассических обыкновенных дифференциальных уравнений как второго, так и более высокого порядка.

В четвертой части курса даются некоторые приложения изложенных ранее результатов.

### Тематический план курса:

1. Банаховы и гильбертовы пространства. Линейные операторы и функционалы.
2. Теоремы Рисса, Банаха, Гильберта-Шмидта.
3. Обобщенные производные. Пространства Соболева.
4. Представление решений оду рядами. Уравнения с особыми точками.
5. Уравнения Бесселя и функции Бесселя. Модифицированные функции Бесселя. Нули функций Бесселя.
6. Краевая задача для функций Бесселя.
7. Полнота функций Бесселя.
8. Гипергеометрическое уравнение. Гипергеометрические функции.
9. Уравнение Лежандра. Многочлены Лежандра.
10. Присоединенные функции Лежандра.
11. Классические ортогональные многочлены.
12. Нули ортогональных многочленов.
13. Дифференциальные уравнения для ортогональных многочленов.
14. Полнота систем ортогональных многочленов.
15. Многочлены Якоби, Чебышева, Лежандра, Лагерра, Эрмита.
16. Особенности в постановках краевых задач для неклассических оду.
17. Краевая задача для оду с неотрицательной характеристической формой. Обобщенные решения.
18. Регулярные решения оду с неотрицательной характеристической формой.
19. Краевая задача для оду второго порядка с характеристической формой произвольного знака. Обобщенные решения.
20. Регулярные решения оду второго порядка с характеристической формой произвольного знака.
21. Неклассические оду высокого порядка. Постановка краевой задачи.
22. Специальные функции в задачах математического моделирования.

23. Краевые задачи для эллипτικο-параболических уравнений второго порядка.  
24. Уравнения смешанного типа в пространстве любой размерности.

### Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Образцы упражнений для самостоятельной работы.

1. Как ставится корректная краевая задача для уравнений

$$a(x)y' + \lambda y = 0$$

при  $x \in (-1, 1)$  в случае функции  $a(x)$ , меняющей знак?

2. В каком случае гипергеометрическое уравнение сводится к уравнению Лежандра?

(выполнить соответствующее преобразование)

3. Как ставится краевая задача для уравнений

$$K(x)y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

в случае а) неотрицательной функции  $K(x)$ ? б) функции  $K(x)$  произвольного знака?

4. Разложить функцию  $\sin(x)$  в ряд по многочленам Лежандра.

5. Всегда ли обобщенные решения являются гладкими функциями?

Для контроля усвоения лекционного материала предусмотрен экзамен по окончании курса. Ниже прилагаются образцы вопросов для подготовки к экзамену.

1. Обобщенные производные и пространства Соболева.
2. Функции Бесселя. Видоизмененные функции Бесселя.
3. Ортогональные многочлены. Нули ортогональных многочленов.
4. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Обобщенные решения.
5. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с характеристической формой произвольного знака.

### Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Садовничий В.А. Теория операторов. М.: МГУ, 2004.
2. Федоров В.М. Курс функционального анализа. Лань, 2005.
3. Свешников А.Г., Боголюбов А.И., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М.: МГУ, 2004.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
6. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984.

7. Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петье Г., Фогель Т. Функции математической физики. М.: Физматлит, 1963 .
8. Амандус Н.Е., Кожанов А.И., Шваб И.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Часть I. Основной курс. Новосибирск: НГУ, 2008.
9. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
10. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Вычислительный центр СО РАН, 1995.
11. Kozhanov, A.I. Composite Type Equations and Inverse Problem. VSP (Netherlands), 1999.

б) дополнительная литература:

1. Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа. Матем. анал. и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 5-13.
2. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980.
3. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции: учебное пособие. М.: Наука, 1984. 385 с.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

1. Интернет-библиотека Мира математических уравнений. Раздел: Уравнения математической физики, дифференциальные уравнения с частными производными. URL: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>
2. Интернет-библиотека Мира математических уравнений. Раздел: Обыкновенные дифференциальные уравнения. URL: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ode.htm>
3. Интернет-библиотека Мира математических уравнений. Раздел: Математический анализ, функциональный анализ. URL: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>
4. Интернет-библиотека Московского центра непрерывного математического образования. URL: <http://www.mccme.ru/free-books/>

## Введение в теорию соболевских пространств

Автор: Матвеева Инесса Изотовна, к.ф.-м.н., доцент ММФ НГУ

Курс ставит своей целью изучение классических результатов из теории соболевских пространств, необходимых при изучении курсов по дифференциальным уравнениям с частными производными и уравнениям математической физики.

В курсе обсуждается понятие обобщенной производной, изучаются свойства суммируемых функций, доказываются теоремы вложения, вводится понятие следа функций из соболевских пространств. Изучаются основные свойства операторов усреднения, Фурье и псевдодифференциальных операторов.

### Тематический план курса:

1. Пространства интегрируемых функций  $L_{loc}(G), L_p(G)$ . Определение и свойства средних функций.
2. Аппроксимация интегрируемых функций. Теорема о плотности  $C_0^\infty(G)$  в  $L_p(G)$ . Лемма дю-Буа-Реймонда.
3. Пространство  $S(R^n)$ . Преобразование Фурье. Формула Фурье, равенство Парсевала.
4. Определение преобразования Фурье для функций из  $L_1(R^n)$  и  $L_2(R^n)$ . Теорема Римана – Лебега, теорема Планшереля. Неравенство Юнга. Преобразование Фурье свертки функций.
5. Обобщенные производные локально суммируемых функций, их свойства, примеры.
6. Слабая замкнутость оператора обобщенного дифференцирования. Перестановочность операторов обобщенного дифференцирования и усреднения.
7. Соболевские пространства  $W_p^1(G)$  и  $\overset{0}{W}_p^1(G)$ . Полнота пространства  $W_p^1(G)$ . Неравенство Стеклова.
8. Теорема о совпадении пространств  $W_p^1(R^n)$  и  $\overset{0}{W}_p^1(R^n)$ . Теоремы о продолжении функций из  $W_p^1(G)$ . Теорема о плотности  $C^\infty(\bar{G})$  в  $W_p^1(G)$ .
9. Оператор Фурье в соболевском пространстве  $W_2^1(R^n)$ . Критерий принадлежности функций пространству  $W_2^1(R^n)$  в терминах преобразования Фурье. Эквивалентные нормы в пространстве  $W_2^1(R^n)$ .
10. Теоремы вложения Соболева и Реллиха для соболевских пространств  $W_2^1(G)$ .
11. Понятие следа функций из пространства  $W_2^1(G)$ . Эквивалентные нормы в пространстве  $W_2^1(G)$ .
12. Псевдодифференциальные операторы (ПДО) в соболевских пространствах  $W_2^1(R^n)$ . Символ ПДО. Примеры ПДО.
13. Теорема о свойствах коммутатора ПДО. Суперпозиция псевдодифференциальных операторов. Свойства сопряженного ПДО.

### Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Ниже прилагаются образцы упражнений для самостоятельной работы.

1. Определить сколько обобщенных производных имеет функция  $u(x) = \ln|x|$  в области  $G = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Найти их.
2. Доказать, что  $u(x) \in W_2^0(a, b)$  тогда и только тогда, когда  $u(x) \in W_2^1(a, b)$  и  $u(a) = u(b) = 0$ .

Для контроля усвоения лекционного материала предусмотрен экзамен по окончании курса. Ниже прилагаются образцы вопросов для подготовки к экзамену.

1. Свойства обобщенных производных.
2. Теорема о совпадении пространств  $W_p^l(\mathbb{R}^n)$  и  $\dot{W}_p^l(\mathbb{R}^n)$ .
3. Теорема вложения Реллиха.

### Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
3. Демиденко Г.В. Введение в теорию соболевских пространств. Новосибирск: НГУ, 1995.
4. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
5. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
6. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

б) дополнительная литература:

1. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Л.: Издв-во ЛГУ, 1985.
2. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.
3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1992.
4. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
5. Успенский С.В., Демиденко Г.В., Перепелкин В.Г. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
6. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1: Теория распределения и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

1. Интернет-библиотека Мира математических уравнений. Раздел: Математический анализ, функциональный анализ. URL: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm>
2. Интернет-библиотека Мира математических уравнений. Раздел: Уравне-

ния математической физики, дифференциальные уравнения с частными производными. URL:

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm>

3. Интернет-библиотека Московского центра непрерывного математического образования. URL: <http://www.mccme.ru/free-books/>

## Гиперболические системы законов сохранения

Автор: Проф., д.ф.-м.н. В.В. Остапенко

Годовой курс лекций «Гиперболические системы законов сохранения» предназначен для студентов 3-5 курса и аспирантов механико-математического факультета. Основной целью его освоения является изучение теории гиперболических систем законов сохранения и ее приложение к теории мелкой воды. Для достижения поставленной цели выделяются задачи курса:

- изучение основных положений теории гиперболических систем законов сохранения;
- ее применение к анализу и построению точных решений уравнений мелкой воды.

По окончании изучения указанной дисциплины студент должен

- **иметь представление** об основных положениях теории гиперболических систем законов сохранения и уметь применять ее к анализу точных решений уравнений мелкой воды.
- **знать** основные теоремы теории гиперболических систем законов сохранения;
- **уметь** строить точные решения конкретных гиперболических систем, в частности уравнений мелкой воды.

Для контроля усвоения курса учебным планом предусмотрен экзамен по окончании курса. В течение семестра студентам предлагается самостоятельно решать некоторые возникающие по ходу чтения курса задачи с последующим их разбором и анализом встречающихся трудностей и ошибок.

### Тематический план курса:

#### **1. Классические решения гиперболической системы уравнений.**

Определение гиперболической системы уравнений, ее характеристическая и инвариантная формы записи. Решение задачи Коши для линейной гиперболической системы. Простые и центрированные волны, примеры их построения. Решение задачи Коши для нелинейного уравнения переноса с кусочно-линейными начальными данными.

#### **2. Обобщенные решения гиперболической системы законов сохранения.**

Законы сохранения, допускаемые квазилинейной гиперболической системой. Определения обобщенного и слабого решения. Условия Гюгонио на сильных разрывах. Устойчивые ударные волны. Метод вязкости определения устойчивых обобщенных решений. Несовместность на сильных разрывах различных дивергентных форм записи гиперболической системы.

#### **3. Скалярный закон сохранения с выпуклым потоком.**

Выпуклые множества и функции и их свойства. Энтропийный критерий устойчивости для скалярного закона сохранения с выпуклым потоком. TVD-свойство обобщенного скалярного решения. Метод потенциала построения обобщенного решения. Асимптотика финитного и периодического скалярного решения.

#### **4. Полные системы законов сохранения с выпуклым расширением.**

Многомерные выпуклые функции. Преобразование Лежандра. Потенциальные отображения. Замыкающий закон сохранения и симметризация гиперболической системы. Выпуклое расширение и критерий корректности полной системы законов сохранения. Энтропийный критерий устойчивости ударных волн в сильно нелинейной гиперболической системе. Задача распада разрыва в сильно нелинейной гиперболической системе.

### **5. Системы законов сохранения уравнений мелкой воды.**

Вывод дифференциальных уравнений теории мелкой воды из уравнений непрерывности и Эйлера и из интегральных законов сохранения массы и полного импульса. Гиперболическая и инвариантная форма записи этих уравнений. Законы сохранения, допускаемые уравнениями мелкой воды. Условия Гюгонио для уравнений мелкой воды, устойчивые прерывные волны. Центрированные волны понижения. Симметризация уравнений мелкой воды. Задача распада разрыва в мелкой воде.

### **Учебно-методическое обеспечение курса.**

Перечень примерных заданий для самостоятельной работы.

- выписать решение задачи Коши для линейной гиперболической системы;
- построить общее решение системы уравнений акустики;
- для нелинейного уравнения переноса построить точное решение задачи Коши с различными конкретными кусочно-линейными начальными данными;
- получить характеристическую и инвариантную формы записи уравнений мелкой воды;
- построить различные законы сохранения, допускаемые уравнениями мелкой воды;
- исследовать совместность на ударных волнах различных систем законов сохранения мелкой воды;
- выделить корректную полную систему законов сохранения для уравнений мелкой воды;
- получить различные симметрические формы записи для уравнений мелкой воды;
- решить задачу о «разрушении плотины».

Образцы вопросов для подготовки к экзамену.

1. Определение гиперболической системы дифференциальных уравнений. Ее гиперболическая и инвариантная формы записи.
2. Законы сохранения. Обобщенные и слабые решения. Условия Гюгонио.
3. Асимптотика финитного и периодического скалярного решений.
4. Полные системы законов сохранения с выпуклым расширением.
5. Системы законов сохранения уравнений мелкой воды.
6. Задача распада разрыва в мелкой воде.

### **Список основной и дополнительной литературы.**

Основная литература:

1. Остапенко В.В. Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды (курс лекций) . Новосибирский государственный университет. Новосибирск, 2004.
2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
3. Lax P.D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: SIAM, 1972.

Дополнительная литература:

1. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М.: Иностран. Лит., 1959.
2. Воеводин А.Ф., Шугрин С.М. Методы решения одномерных эволюционных систем. Новосибирск: Наука, 1993.

## Устойчивость решений дифференциальных уравнений

Лектор: к.ф.-м.н., доц. А.С. Рудомётова.

Полугодовой альтернативный спецкурс "Устойчивость решений дифференциальных уравнений" предназначен для студентов четвертого-шестого курсов и аспирантов механико-математического факультета. Основной целью курса является углубленное изучение студентами и аспирантами теории устойчивости по Ляпунову. Хорошее владение материалом курса предполагает понимание основных положений теории, умение применить изученные методы для решения других, возможно, более сложных чем уже рассмотренные, задач. По окончании изучения указанной дисциплины студент должен

- иметь представление о месте и роли изучаемой дисциплины среди других наук;

- знать основные определения и теоремы курса, владеть изученными методами;

- уметь применять полученные знания для решения не только типичных, но и новых задач.

Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрен зачет.

### Тематический план курса:

#### 1. Метод функций Ляпунова.

1.1. Определение устойчивости. Вывод уравнений возмущенного движения.

1.2. Функции Ляпунова.

1.3. Теоремы Ляпунова об устойчивости.

1.4. Теорема об асимптотической устойчивости.

1.5. Теоремы о неустойчивости.

1.6. Неавтономные системы.

1.7. Примеры.

#### 2. Линейные системы.

2.1. Существование и построение функций Ляпунова в виде квадратичных форм для линейных систем.

2.2. Оценка решений линейных систем.

2.3. Функционалы Ляпунова для интегро-дифференциальных уравнений.

#### 3. Нелинейные системы.

3.1. Теоремы об устойчивости по первому приближению.

3.2. Оценка решений нелинейных систем с помощью функций Ляпунова.

3.3. О некоторых свойствах функций Ляпунова.

3.4. Общий обзор методов построения функций Ляпунова для нелинейных систем.

3.5. Векторные функции Ляпунова. Устойчивость сложных систем.

3.6. Устойчивость в целом.

3.7. Примеры.

#### 4. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.

4.1. Банахово пространство.

4.2. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.

- 4.3. Примеры дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.
- 4.4. Задача о накоплении возмущений на конечном интервале времени.
- 4.5. Задача о накоплении возмущений на бесконечном интервале времени.  
Теоремы об устойчивости нулевого решения однородного линейного уравнения.
- 4.6. Теоремы об устойчивости решений нелинейных уравнений.

#### **Учебно-методическое обеспечение дисциплины**

Вопросы для подготовки к экзамену практически совпадают с программой курса "Устойчивость решений дифференциальных уравнений".

#### **Список основной и дополнительной литературы.**

1. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. - М.: Наука, 1967.
2. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. - М.: Наука, 1970.
3. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. - М.: Наука, 1970.
4. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959.
5. Массера Ж., Шеффер Ж. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.- М.: Мир, 1969.
6. Ляпунов А.М. Собрание сочинений. Том 2. - М.: Изд-во АН СССР, 1956.
7. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Вычислительные методы линейной алгебры. - М.: Мир, 1964.

## **Линейные и нелинейные эволюционные уравнения математической физики**

Автор: доцент кафедры дифференциальных уравнений НГУ, д.ф.-м.н. Трахинин Ю.Л.

Обязательный годовой специальный курс “Линейные и нелинейные эволюционные уравнения математической физики” предназначен для студентов механико-математического факультета университета, специализирующихся на кафедре дифференциальных уравнений. Слушателями курса могут быть также магистранты и аспиранты механико-математического факультета университета.

Основной целью освоения курса является понимание студентом основных идей и методов линейной и нелинейной теории эволюционных дифференциальных уравнений с частными производными, умение применить изученные методы для других задач. Для достижения этой цели выделяются задачи курса:

- усвоение принципиальных моментов теории, к которым относятся: понятия локального и глобального по времени существования слабых, сильных и классических решений линейных и нелинейных эволюционных уравнений математической физики, основные теоремы вложения Соболева, слабое и равномерное условие Лопатинского, симметризатор Крайса, понятие слабой корректности начально-краевых задач математической физики и т.д.
- изучение основных методов теории, к которым относятся: спектральный и “энергетический” методы, метод “слабое = сильное”, метод симметризатора Крайса, применение мультипликативных неравенств типа Мозера, применение принципа сжимающих отображений, метод Нэша-Мозера и др.

В результате изучения курса студент должен:

- иметь представление о возможных обобщениях основных теоретических положений и о границах применимости того или иного метода.
- знать основные определения и теоремы курса, владеть изученными методами.
- уметь применять (в рамках границ применимости) изученные методы для нерассмотренных в курсе конкретных эволюционных уравнений математической физики.

Для контроля усвоения курса учебным планом предусмотрен экзамен в конце курса. В конце первого семестра организуется коллоквиум.

### Тематический план курса:

1. Нелинейные эволюционные уравнения математической физики. Законы сохранения: гиперболические симметризуемые, параболические, “вязкие”.

Примеры: система газовой динамики и Навье-Стокса, система идеальной магнитной гидродинамики и др.

2. Метод сжимающих отображений для квазилинейных гиперболических систем. Теорема Банаха о неподвижной точке и ее использование для доказательства существования решений Нелинейных задач.
3. Задача Коши для линейной гиперболической системы с постоянными коэффициентами. Теорема о существовании и единственности  $L^2$ -решения
4. Существование слабого решения линейной гиперболической системы с переменными коэффициентами. Понятие слабого решения. Доказательство его существования с помощью теоремы Хана-Банаха и теоремы Рисса о представлении непрерывного линейного функционала.
5. Сильное решение линейной гиперболической системы с переменными коэффициентами. Доказательство того, что слабое  $L^2$ -решение является сильным.
6. Неравенство Гальярдо-Ниренберга и мультипликативные неравенства типа Мозера. Вывод этих неравенств из неравенства Гальярдо-Ниренберга.
7. Существование гладкого решения линейной гиперболической системы с переменными коэффициентами. Вывод априорных оценок для задачи Коши для этой системы и их использование для доказательства существования и единственности решений.
8. Локальная по времени теорема существования решения задачи Коши для гиперболической системы законов сохранения. Доказательство этой теоремы с помощью метода сжимающих отображений.
9. Задача со свободной границей с граничными условиями на поверхности ударной волны. Понятие слабого решения системы законов сохранения и соотношения Ренкина-Гюгонио. Приведение задачи со свободной границей к задаче в фиксированной области.
10. Постановка линеаризованной задачи для ударной волны. Лаксовские ударные волны. Задачи с переменными и постоянными коэффициентами.
11. Строго диссипативный  $p$ -симметризатор и априорная оценка для задачи с постоянными коэффициентами. Определение и примеры. Вывод априорной оценки для линеаризованной задачи для плоской ударной волны.
12. Локальная теорема существования и единственности для Нелинейной задачи для лаксовской ударной волны. Доказательство теоремы с помощью метода сжимающих отображений.
13. Задача со свободной границей о движении газообразной звезды, как пример слабо корректной задачи с неэллиптическим символом границы.
14. Базовая оценка для линеаризованной задачи о движении газообразной звезды. Вывод оценки с помощью “энергетического метода”.
15. “Подручные” априорные оценки (tame estimates). Вывод такой оценки для

- линеаризованной задачи о движении газообразной звезды.
16. Аппроксимационное решение и условия согласования. Построение аппроксимационного решения и вывод оценки для него для задачи о движении газообразной звезды.
  17. Метод Нэша-Мозера. Основная идея метода и его реализация для задачи о движении газообразной звезды. Вывод оценок для ошибок схемы Нэша-Мозера и доказательство ее сходимости.
  18. Понятия слабого и равномерного условий Лопатинского для гиперболических и других задач для эволюционных уравнений. Определения и примеры.
  19. Симметризатор Крайса для начально-краевой задачи для строго гиперболической системы. Определение и построение симметризатора. Вывод априорных  $L_2, \eta$  – оценок.
  20. Задача со свободной границей для тангенциального разрыва в магнитной гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости. Постановка задачи, приведение к фиксированной области, линеаризация.
  21. Эллиптически вырождающийся символьный симметризатор для линеаризованной задачи для тангенциального разрыва. Его определение для сведенной задачи для возмущения полного давления. Построение такого симметризатора и вывод априорной  $L_2, \eta$  – оценки.
  22. Вязкие профили лаксовских ударных волн. Определение и примеры. Нелинейная и спектральная устойчивость. Устойчивость относительно возмущений нулевой массы. “Вязкая” устойчивость газодинамических ударных волн.

### **Учебно-методическое обеспечение курса.**

Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы.

1. На примере задачи Коши для гиперболической системы законов сохранения рассказать основную идею метода сжимающих отображений для доказательства существования и единственности решений.
2. Из неравенства Гальярдо-Ниренберга и теоремы вложения Соболева вывести одно из неравенств типа Мозера.
3. Дать определение слабого решения для линейной задачи Коши для гиперболической системы и рассказать идею доказательства его существования.
4. Доказать, что условия Лакса гарантируют правильное число граничных условий на ударной волне.
5. Сформулировать основные идеи метода Нэша-Мозера.

Образцы вопросов для подготовки к экзамену.

1. Симметризация гиперболических законов сохранения.
2. Метод симметризатора Крайса.
3. Неравенство Гальярдо-Ниренберга и его следствия.
4. Теорема существования Вольперта-Худяева-Като.
5. Слабо корректные задачи. Априорные оценки с потерей производных.
6. Метод Нэша-Мозера.
7. Метод “слабое решение = сильное решение”.

### **Список литературы.**

#### **ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА**

1. Трахинин Ю.Л. Элементы теории гиперболических систем законов сохранения со многими пространственными переменными: Учебн. пособие. Изд-во НГУ, Новосибирск, в печати.
2. Блохин А.М. Элементы теории гиперболических систем и уравнений: Учебн. пособие. Изд-во НГУ, Новосибирск, 1995.
3. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Москва: Наука, 1988.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Наука, Москва, 1989.
5. Blokhin A., Trakhinin Yu. Well-posedness of linear hyperbolic problems: theory and applications. New York: Nova Science Publishers, 2006.
6. Majda A. Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables. New York: Springer-Verlag, 1984.
7. Metivier G. Stability of multidimensional shocks. Boston: Birkhäuser, 2001 (доступно в Интернет по адресу: <http://www.math.u-bordeaux.fr/~metivier/Kochel03.pdf>).

#### **ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА**

Блохин А.М., Трахинин Ю.Л. Устойчивость сильных разрывов в магнитной гидродинамике и электрогидродинамике. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

# Курсы кафедры математического анализа

## Геометрические вопросы теории функций вещественных переменных

Автор - академик, д.ф.-м.н. Решетняк Ю.Г.

### МЕБИУСОВЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Ортогональные, мебиусовы и псевдоортогональные преобразования
2. Полисферическое расслоение и линейные представления мебиусовых преобразований
3. Дифференциально-геометрическая характеристика движений и мебиусовы преобразований
4. Топология на группах мебиусовых преобразований
5. Инфинитезимальные операторы групп мебиусовых преобразований
6. Доказательство теоремы Лиувилля о конформных отображениях пространства при минимальных предположениях гладкости

### ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

1. Представления функций через операторы с условием полной интегрируемости
2. Интегральные представления для специальных дифференциальных операторов
3. Некоторые классы областей: области Джона, области с условием внутренней спирали
4. Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей.

### ОТОБРАЖЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИСКАЖЕНИЕМ

1. Определение
2. Аналитические свойства
3. Топологические свойства
4. Связь с субэллиптическими уравнениями

### УСТОЙЧИВОСТЬ В ТЕОРЕМЕ ЛИУВИЛЛЯ О КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВА

1. Качественная теорема устойчивости
2. Локальная количественная теорема устойчивости
3. Устойчивость в теореме Лиувилля на областях Джона

### УСТОЙЧИВОСТЬ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. Устойчивость относительно равномерной нормы
2. Устойчивость в соболевской норме
3. Достаточное условие локальной инъективности квазиизометрических отображений

### Литература

- Решетняк Ю.Г. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996

- Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982
- Iwaniec T., Martin G., *Geometric function theory and nonlinear analysis*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford: Oxford University Press, 2001, 552 p.

## **Квазиконформный анализ на метрических структурах**

Автор - д.ф.-м.н., профессор Водопьянов С.К.

### **Квазиконформные отображения и их свойства**

Определения квазиконформных отображений и их эквивалентность. Свойства квазиконформных отображений. Квазиконформные отображения на плоскости и уравнения Бельтрами. Теорема о существовании квазиконформного отображения на плоскости. Теорема об ограничении квазиконформного отображения на гиперплоскость и теорема о продолжении.

### **Отображения с ограниченным искажением и их свойства**

Определение отображения с ограниченным искажением и его свойства. Непрерывность отображения с ограниченным искажением. Отображение с ограниченным искажением и нелинейные уравнения эллиптического типа. Топологические свойства отображения с ограниченным искажением: открытость и дискретность. Метрические свойства отображений с ограниченным искажением. Теорема Лиувилля.

### **Теоремы жесткости типа Мостова и их обобщения**

Гиперболическая геометрия, ее модели. Идеальная граница в гиперболической геометрии и теорема о продолжении изометрических отображений на идеальную границу. Теорема Мостова о жесткости гиперболических пространственных форм.

### **Пространства Соболева и квазиконформные отображения на произвольных метрических структурах**

Поточечное описание пространств Соболева. Пространства Соболева-Хайлаша на метрических структурах. Примеры метрических структур. Теоремы вложения и их применения. Квазиконформные отображения на произвольных метрических структурах и их свойства.

### **Квазиконформные отображения и функциональные пространства с дробными производными**

Определение пространств Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля. Инвариантность пространств Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля при квазиконформных отображениях.

### **Список литературы:**

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М., *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, М.: Наука, 1996.
2. Водопьянов С. К., *Отображения однородных групп и вложения функциональных пространств* // Сиб. мат. журн. 30, по 5 (1989), 25-41.
3. Водопьянов С. К., *О регулярности отображений, обратных к Соболевским* // Доклады РАН, 423, по. 5 (2008), 592-596.
4. Водопьянов С. К., *О регулярности отображений, обратных к Соболевским* // Мат. сб. (2011), в печати.
5. Решетняк Ю. Г., *Теоремы устойчивости в геометрии и анализе*. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.

6. Решетняк Ю. Г., *Пространственные отображения с ограниченным искажением*. Новосибирск: Наука, 1982.
7. Трибель Х., *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*. М.: Мир, 1980.
8. Astala K., Iwaniec T., Martin G., *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*. Princeton Mathematical Series 48. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2009, 677 p.
9. Haïssinsky P., *Quasiconformal geometry, analysis for hyperbolic rigid metric spaces (after Mostow, Pansu, Bourdon, Pajot, Bonk, Kleiner...)*. (Géométrie quasiconforme, analyse au bord des espaces métriques hyperboliques et rigidités (d'après Mostow, Pansu, Bourdon, Pajot, Bonk, Kleiner...)) // Séminaire Bourbaki. Volume 2007/2008. Exposés 982–996. Paris: Société Mathématique de France (SMF). Astérisque 326, 321-362, Exp. No. 993 (2009).
10. Hajlasz P., *Sobolev spaces on metric measure spaces* / Auscher, Pascal (ed.) et al., Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces. Lecture notes from a quarter program on heat kernels, random walks, and analysis on manifolds and graphs, April 16–July 13, 2002, Paris, France. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). Contemp. Math. 338, 173-218 (2003).
11. Hajlasz P., Koskela P., *Sobolev met Poincaré*. Mem. Am. Math. Soc. 688, (2000), 101 p.
12. Heinonen J., Koskela P., *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry* // Acta Math. 181, no.1 (1998), 1-61.
13. Iwaniec T., Martin G., *Geometric function theory and nonlinear analysis*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford: Oxford University Press, 2001, 552 p.
14. Mostow G. D. *Strong rigidity of locally symmetric spaces*. Annals of Math. Studies 78. Princeton: Princeton Univ. Press, 1973, 196 p.
15. Vaisala J., *Lectures on  $n$ -dimensional quasiconformal mappings*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971, 144 p.
16. Vodopyanov S.K., *Foundations of the theory of mappings with bounded distortion on Carnot groups*. The interaction of analysis and geometry. (Burenkov, V. I. (ed.) et al.), International school-conference on analysis and geometry, Novosibirsk, Russia, August 23–September 3, 2004. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS, Contemporary Mathematics 424), (2007), 303-344.

## **Квазиконформный анализ и теория пространств Соболева**

Автор - д.ф.-м.н., профессор Водопьянов С.К.

### **Квазиаддитивные функции множества**

Квазиаддитивные функции множества и их свойства. Оценка интеграла от верхней производной функции множества. Теорема о дифференцировании квазиаддитивной функции множества. Теорема Лебега о дифференцировании интеграла. Теорема Лебега о дифференцируемости монотонной функции. [6], [7], [14].

### **Определение пространств Соболева и его свойства**

Абсолютно непрерывные функции, их дифференцируемость и восстановление по производной. Абсолютно непрерывные функции на прямой как функции с обобщенными производными. Определение функций с обобщенной производной в многомерном евклидовом пространстве. Классы функций Соболева и их свойства. Усреднение по Соболеву и свойства оператора усреднения. [8], [9].

### **Теоремы вложения**

Интегральные представления функций. Потенциалы Рисса и оценки для потенциалов Рисса. Теоремы вложения в областях Джона. Компактность операторов вложения. Неравенство Пуанкаре и коэрцитивные оценки. [9], [11], [13].

### **Теория емкости в пространствах Соболева**

Потенциалы Бесселя и их свойства. Энергия и нелинейные потенциалы. Неравенство Вольфа. Емкость и нелинейные потенциалы. Емкостное неравенство и теоремы вложения. Емкостные метрические характеристики множеств. Уточненные и квазинепрерывные функции. [1], [10], [12]

### **Классы отображений, индуцирующие ограниченные операторы пространств Соболева**

Отображения с конечным искажением и их свойства. Свойства отображений, индуцирующих ограниченные операторы пространств Соболева с первыми обобщенными производными (необходимые условия). Достаточные условия для отображения, индуцирующего ограниченный оператор пространств Соболева. [2], [3], [4], [5], [15].

### **Список литературы:**

1. Водопьянов С. К., Кудрявцева Н. А. *Нелинейная теория потенциала для пространств Соболева на группах Карно* // Сиб. мат. журн. 50, по. 5 (2009), 1016–1036.
2. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., *Структурные изоморфизмы пространств  $W^1_n$  и квазиконформные отображения* // Сиб. мат. журн. 16, по. 2 (1975), 224-246.
3. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., *Функциональные характеристики квазиизометрических отображений* // Сиб. мат. журн. 17, по. 4 (1976), 768-773.

4. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., *Квазиконформные отображения и пространства функций с первыми обобщенными производными* // Сиб. мат. журн. 17, no. 3 (1976), 515-531.
5. Водопьянов С. К., Ухлов А. Д., *Операторы суперпозиции в пространствах Соболева* // Изв. вузов. Матем. 10 (2002), 11–33.
6. Водопьянов С. К., Ухлов А. Д., *Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. I* // Матем. тр., 6:2 (2003), 14–65
7. Водопьянов С. К., Ухлов А. Д., *Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. II* // Матем. тр., 7:1 (2004), 13–49
8. Водопьянов С. К., *Интеграл Лебега. Учебно-методическое пособие*. Новосибирск: НГУ, 2010
9. Мазья В. Г. *Пространства С. Л. Соболева*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 416 с.
10. Мазья В. Г., Хавин В. П., *Нелинейная теория потенциала* // Успехи мат. наук, 27:6 (168), (1972), 67–138.
11. Решетняк Ю. Г. *Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей* // Сиб. мат. журн. 21, no. 6 (1980), 108-116
12. Adams D. R., Hedberg L. I. *Function spaces and potential theory*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. 314. Berlin: Springer-Verlag, 1995.
13. Isangulova D. V., Vodopyanov S. K. *Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups* // Eurasian Math. J. 1, no. 3 (2010), 43-82.
14. Rado T., Reichelderfer P.V., *Continuous transformations in analysis with an introduction to algebraic topology* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. LXXV.) Berlin- Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, VII, 441 S. 53 Abb. (1955).
15. Vodopyanov S.K., *Composition Operators on Sobolev Spaces* / In: “Complex Analysis and Dynamical Systems II” Contemporary Mathematics, AMS, 2005. V. 382, 327-342.

## Спецсеминар по геометрическому анализу.

Руководитель - д.ф.-м.н., профессор Водопьянов С.К.

На семинаре докладываются оригинальные работы участников семинара (в том числе, преподавателей, аспирантов и магистрантов кафедры геометрии и топологии, кафедры теории функций и кафедры математического анализа), а также реферируются статьи по тематике семинара.

Научно-исследовательский семинар посвящен современному направлению анализа - стыку анализа и геометрии. Магистранты познакомятся со следующими темами:

1. Дифференцирование модельных примеров квазиаддитивных функций множества. Разложение монотонной функции на абсолютно непрерывную, сингулярную и функцию скачков.
2. Восстановление абсолютно непрерывных функций по производной. Формула интегрирования по частям. Формула замен переменной.
3. Абсолютно непрерывные функции на прямой как функции с обобщенными производными. Определение функций с обобщенной производной в многомерном евклидовом пространстве. Классы функций Соболева и их свойства. Теорема об аппроксимации единицы. Усреднение по Соболеву и свойства оператора усреднения.
4. Теоремы о разбиении. Теорема о максимальной функции.
5. Интегральные представления функций. Потенциалы Рисса и оценки для потенциалов Рисса. Теоремы вложения в областях Джона. Примеры областей Джона.
6. Компактность операторов вложения пространств Лебега, Гёльдера, Орлича. Примеры пространств Орлича. Несовпадение пространств Орлича с  $L_p$ -пространствами.
7. Оценки для емкости в модельных примерах. В частности, оценки для емкости шара и емкости Тейхмюллера. Уточненные и квазинепрерывные функции. Применение квазинепрерывности для доказательства непрерывности монотонной функции класса Соболева  $W^1_n$ .
8. Сингулярные интегралы. Теорема Зигмунда – Кальдерона об ограниченности сингулярного оператора.

## **Геометрическая теория меры и квазиконформный анализ на пространствах Карно-Каратеодори.**

Руководитель - д.ф.-м.н., профессор Водопьянов С.К.

### **Дифференцирование отображений пространств Карно – Каратеодори.**

Определение дифференцируемости в геометрии Карно – Каратеодори. Теорема о дифференцируемости почти всюду спрямляемых кривых. Дифференцируемость отображений, имеющих непрерывные горизонтальные производные. Теоремы типа Радемахера и Степанова. Теорема об аппроксимативной дифференцируемости отображений, имеющих аппроксимативные горизонтальные производные. Формалу замены переменных. [2], [6], [7]

### **Формулы геометрической теории меры на пространствах Карно – Каратеодори.**

Коэффициент площади. Формула площади для отображений класса  $C^1$ . Формула площади для липшицевых отображений. Регулярные и нерегулярные точки границы множества. Множество уровня и асимптотическое поведение меры Хаусдорфа пересечения шара радиуса  $r$  с множеством уровня при  $r$ , стремящемся к 0, в регулярной точке. Коэффициент коплощади. Характеристическое множество, оценка его меры. Формула коплощади. [3], [4]

### **Теория квазиконформных отображений в геометрии пространств Карно – Каратеодори.**

Дифференцируемость квазиконформных отображений. Абсолютная непрерывность квазиконформных отображений вдоль интегральных линий векторных полей. Эквивалентные определения квазиконформных отображений: метрическое, аналитическое, емкостное и функциональное. Свойство Лузина квазиконформных отображений. Теорема о замене переменных для квазиконформных отображений. Связь с пространствами Соболева. [1], [5], [7]

### **Отображения с ограниченным искажением на группах Карно**

Отображения с ограниченным искажением. Доказательство перестановочности операции внешнего дифференцирования и переноса горизонтальных дифференциальных форм на группах Карно. Связь отображений с ограниченным искажением с субэллиптическими уравнениями. Нелинейная теория потенциала вырождающихся субэллиптических уравнений и отображения с ограниченным искажением. Топологические свойства отображений с ограниченным искажением. Локальные оценки искажения и теорема о полунепрерывности коэффициента искажения. [8]

## **Литература**

- [1] Водопьянов С. К. *Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно* // Сиб. мат. журн. 1996. Т.37, №6. С. 1269-1295.
- [2] Basalaev S. G., Vodopyanov S. K. *Approximate differentiability of mappings of Carnot -Caratheodory spaces* // Eurasian Math. J. 2, no. 1 (2011), to appear.
- [3] Karmanova M., Vodopyanov S., *Geometry of Carnot-Caratheodory spaces, differentiability, area and coarea formulas* / In: Analysis and Mathematical Physics,

Trends in Mathematics, Verlag Basel/Switzerland: Birkhauser, 2009. 233-335.

[4] Karmanova M., Vodopyanov S., *An Area Formula for Contact  $C^1$ -Mappings of Carnot Manifolds* // Complex Variables and Elliptic Equations, 55 (2010), I-III. P. 317-329

[5] Margulis, G.A.; Mostow, G.D. *The differential of a quasi-conformal mapping of a Carnot-Carathéodory space* // Geom. Funct. Anal. 5, No. 2, 402-433 (1995).

[6] Pansu P., *Métriques de Carnot - Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un* // Acta Math. 129 (1989), no. 1, 1-60

[7] Vodopyanov S.K., *Geometry of Carnot-Carathéodory spaces and differentiability of mappings*. The interaction of analysis and geometry. (Burenkov, V. I. (ed.) et al.), International school-conference on analysis and geometry, Novosibirsk, Russia, August 23–September 3, 2004. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS, Contemporary Mathematics 424), (2007), 247-301.

[8] Vodopyanov S.K., *Foundations of the theory of mappings with bounded distortion on Carnot groups*. The interaction of analysis and geometry. (Burenkov, V. I. (ed.) et al.), International school-conference on analysis and geometry, Novosibirsk, Russia, August 23–September 3, 2004. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS, Contemporary Mathematics 424), (2007), 303-344.

## **Геометрия пространств Карно – Каратеодори**

Автор - д.ф.-м.н., профессор Водопьянов С.К.

### **Распределения и фильтрация на многообразиях.**

Алгебра Ли векторных полей на многообразии. Распределения векторных полей. Фильтрация на многообразии. Градуированные нильпотентные группы, теория оптимального управления, ОДУ, пространства Карно – Каратеодори, система векторных полей, удовлетворяющих условию Хёрмандера. [1], [3], [5], [6]

### **Абстрактные группы Ли и группы Карно**

Дифференциалы, коммутаторы, алгебра Ли левоинвариантных векторных полей, гомоморфизм, экспоненциальные отображения. [4], [8]

### **Группы Карно**

Некоторые свойства стратификации на группе Карно. Абстрактные однородные группы Карно. Однопараметрические группы растяжений. Однородные метрики. Сублапласиан на стратифицированной группе. [4], [8]

### **Двухступенчатые группы Карно**

Группы Гейзенберга - Вейля. Двухступенчатые однородные группы Карно. Свободные двухступенчатые однородные группы. Двухступенчатые группы Карно  $H$ -типа. [4], [8]

### **Примеры групп Карно.**

Евклидовы группы. Группы Карно однородной размерности  $Q$  меньшей, либо равной 3.  $V$ -группы. Группы  $K$ -типа. Сумма групп Карно. Различные примеры сублапласианов. [4], [8]

### **Касательный конус в смысле Громова.**

Метрические характеристики пространств Карно – Каратеодори. Существование локальных нильпотентных групп. Теорема о сравнении геометрий исходного пространства и локальной группы. Теоремы расхождений цепочек интегральных линий векторных полей. Локальная аппроксимационная теорема. Теорема о сходимости к касательному конусу. [2], [6], [7]

### **Теорема Рашевского – Чоу.**

Существование горизонтальных кривых. Метрика Карно – Каратеодори. Ball-Vox теорема. Хаусдорфова размерность. [7], [9]

## **Литература**

[1] А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, “Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи”, Динамические системы – 7, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **16**, ВИНТИ, М., 1987, 5–85.

[2] Карманова М.Б. *Характеристическое множество гладких контактных отображений пространств Карно-Каратеодори* // Доклады Академии наук 2009, Т. 425, № 3, 314-319.

[3] Bellaïche, André. *The tangent space in sub-Riemannian geometry* / In: Bellaïche, André (ed.) et al., Sub-Riemannian geometry. Proceedings of the satellite meeting of the 1st European congress of mathematics `Journées nonholonomes: géométrie sous-

- riemannienne, théorie du contrôle, robotique', Paris, France, June 30--July 1, 1992. Basel: Birkhäuser. Prog. Math. 144, 1-78 (1996)
- [4] Bonfiglioli, Andrea; Lanconelli, Ermanno; Uguzzoni, Francesco, *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians*. Springer Monographs in Mathematics. New York, NY: Springer. (2007). 800 p.
- [5] Bryant, Robert L.; Chern, S.S.; Gardner, Robert B.; Goldschmidt, Hubert L.; Griffiths, P.A. *Exterior differential systems*. Publications, Mathematical Sciences Research Institute, 18. New York etc.: Springer-Verlag (1991), 475 p.
- [6] Gromov M., *Carnot-Carathéodory spaces seen from within* / In: Bellaïche, André (ed.) et al., Sub-Riemannian geometry. Proceedings of the satellite meeting of the 1st European congress of mathematics 'Journées nonholonomes: géométrie sous-riemannienne, théorie du contrôle, robotique', Paris, France, June 30-July 1, 1992. Basel: Birkhäuser. Prog. Math. 144, 79-323 (1996).
- [7] Karmanova M., Vodopyanov S., *Geometry of Carnot-Carathéodory spaces, differentiability, area and coarea formulas* / In: Analysis and Mathematical Physics, Trends in Mathematics, Verlag Basel/Switzerland: Birkhauser, 2009. 233-335.
- [8] Montgomery, Richard. *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*. Mathematical Surveys and Monographs 91. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), (2002), 259 p.
- [9] Nagel, Alexander; Stein, Elias M.; Wainger, Stephen, *Balls and metrics defined by vector fields. I: Basic properties* // Acta Math. 155, 103-147 (1985).

## Анализ на пространствах Карно – Каратеодори (семинар)

Руководитель - д.ф.-м.н., профессор Водопьянов С.К.

На семинаре докладываются оригинальные работы участников семинара (в том числе, преподавателей, аспирантов и магистрантов кафедры геометрии и топологии, кафедры теории функций и кафедры математического анализа), а также реферируются статьи по тематике семинара.

Научно-исследовательский семинар посвящен современному направлению анализа - анализу на пространствах Карно - Каратеодори. Магистранты познакомятся и научатся применять следующие понятия и теоремы:

- Векторные поля в  $\mathbb{R}^N$
- Интегральные кривые
- Скобки Ли векторных полей
- Группы Ли в  $\mathbb{R}^N$
- Алгебры Ли и группы Ли в  $\mathbb{R}^N$
- Матричные группы Ли в  $\mathbb{R}^N$  и их алгебры Ли
- Экспоненциальные отображения групп Ли в  $\mathbb{R}^N$
- Однородные группы Ли в  $\mathbb{R}^N$ : однородные функции и дифференциальные операторы, операции умножения на однородных группах Ли, алгебры Ли однородных групп Ли в  $\mathbb{R}^N$ , экспоненциальные отображения групп Ли в  $\mathbb{R}^N$
- Однородные группы Карно
- Сублапласианы на однородных группах Карно
- Горизонтальный градиент.
- Свободные алгебры Ли и свободные группы Ли. Применение формулы Кэмпбелла – Хаусдорфа для операции умножения. Канонический способ построения канонических групп Ли. Формула Кэмпбелла – Хаусдорфа для стратифицированных полей. Формула Кэмпбелла – Хаусдорфа для гладких векторных полей.
- Подъемы на группах Карно. Подъем до свободной группы Карно. Примеры подъемов. Применения к уравнениям с частными производными.
- Группы Гейзенбергова типа. Прямая характеристика групп Гейзенбергова типа. Фундаментальное решение сублапласиана для групп Гейзенбергова типа.
- Связь геометрии группы Гейзенберга и единичной сферы в  $\mathbb{C}^N$
- Фильтрации и ОДУ.

## **Эргодическая теория**

Автор: д.ф.-м.н., доцент Качуровский А.Г.

**ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ.** Автоморфизмы и эндоморфизмы пространства с мерой, потоки и полупотоки. Проблема существования инвариантной меры. Построение таких мер. Эргодичность и перемешивание, слабое и сильное. Примеры и приложения.

**ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ.** Эргодическая проблема статистической физики. Индивидуальная эргодическая теорема Биркгофа и статистическая эргодическая теорема фон Неймана.

**ОБЩИЕ КОНСТРУКЦИИ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ.** Пространства Лебега. Проблема метрического изоморфизма. Спектр фон Неймана и энтропия Колмогорова-Синая как основные метрические инварианты. Интегральный и производный автоморфизмы. Прямые и косые произведения динамических систем.

**СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ.** Унитарные и изометрические операторы, сопряженные с динамическими системами. Спектральные свойства динамических систем. Спектральные меры. Корреляционные коэффициенты как коэффициенты Фурье спектральных мер. Стохастические меры.

**ЭНТРОПИЙНАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ.** Энтропия разбиения, энтропия автоморфизма, образующие разбиения. Энтропия автоморфизмов Бернулли. Энтропия и спектр. К-системы.

**ЭРГОДИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ.** Сходимость по норме и п.в.. Максимальные и доминантные неравенства. Пересечение полосы и другие характеристики. Обобщения на сжатия в пространствах суммируемых функций.

**УНИФИКАЦИИ ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ И ТЕОРЕМ О СХОДИМОСТИ МАРТИНГАЛОВ.** Обращенные мартингалы, их общие с эргодическими средними свойства. Мартингално-эргодические и эргодико-мартингалные процессы: сходимость, основные неравенства. Связи с другими подходами к унификации. Нерешенные проблемы.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
2. Халмош П. Лекции по эргодической теории. Ижевск, Изд-во «Регулярная и хаотическая динамика», 1999.
3. Арнольд В.И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. Ижевск, Изд-во «Регулярная и хаотическая динамика», 1999.
4. Sinai Ya.G. (editor). Dynamical systems, ergodic theory and applications. Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol. 100. Springer-Verlag, 2000.
5. Качуровский А.Г. Единые теории, унифицирующие эргодические средние и мартингалы // Труды МИАН, 2007. Т. 256. С. 172-200.

## **Эргодические теоремы**

Автор - д.ф.-м.н., доцент Качуровский А.Г.

**ЭРГОДИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА.** Эргодическая проблема статистической физики (Больцман). Индивидуальная эргодическая теорема Биркгофа и статистическая эргодическая теорема фон Неймана как один из возможных подходов к решению этой проблемы.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ.** Авторские доказательства Биркгофа и фон Неймана. Уточнения и упрощения Хинчина, Хопфа, Рисса, Колмогорова, Гарсиа, Камае.

**ОБОБЩЕНИЯ ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ.** Теоремы Хопфа и Степанова для локально конечных инвариантных мер. Обобщения на сжатия в пространствах суммируемых функций. Операторные эргодические теоремы. Обобщения на случай действия решеток, и общей аменабельной группы преобразований. Векторнозначные эргодические теоремы. Локальная эргодическая теорема Винера и ее обобщения. Обобщенные эргодические средние.

**ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ПО ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ.**

Сходимости эргодических средних по подпоследовательностям. Универсально хорошие и плохие последовательности.

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ, ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И**

**ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.** Спектральная теория динамических систем. Стационарные в широком и узком смысле стохастические процессы. Спектральные меры стационарных процессов. Корреляционные коэффициенты как коэффициенты Фурье спектральных мер. Стохастические меры.

**СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ.** Единицы измерения скоростей. Отрицательные результаты Кренгеля и Халаша, необходимость применения спектральной теории динамических систем.

Вычисление скоростей сходимости по особенности в нуле спектральной меры усредняемой функции относительно динамической системы, и по скорости убывания корреляционных коэффициентов. Нерешенные проблемы.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

2. Krengel U. Ergodic theorems. Berlin; New York: W. de Gruyter, 1985.

3. Sinai Ya.G. (editor). Dynamical systems, ergodic theory and applications. Encyclopedia of

Mathematical Sciences, Vol. 100. Springer-Verlag, 2000.

4. Качуровский А.Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // УМН, 1996. Т. 51,

№ 4. С. 73-124.

5. Качуровский А.Г., Решетенко А.В. О скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем // Мат. сборник, 2010. Т. 201, №4. С. 25-32.

## **Унификации эргодических средних и мартиггалов (семинар)**

Руководитель: д.ф.-м.н., доцент Качуровский А.Г.

На семинаре докладываются оригинальные работы участников семинара (в том числе, преподавателей, аспирантов и магистрантов кафедры геометрии и топологии, кафедры теории функций и кафедры математического анализа), а также реферируются статьи по тематике семинара.

Научно-исследовательский семинар посвящен изучению эргодической теории и теории мартиггалов. Среди основных вопросов, обсуждаемых на семинаре:

**ЭРГОДИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ.** Определения, теоремы Биркгофа и фон Неймана о сходимости. Максимальные и доминантные неравенства. Аналоги этих неравенств для действий сжатий в пространствах суммируемых функций. Математическое ожидание числа пересечений полосы и другие колебательные характеристики.

**ОБРАЩЕННЫЕ МАРТИГГАЛЫ.** Определения, теоремы Дуба о сходимости. Максимальные и доминантные неравенства. Математическое ожидание числа пересечений полосы. Удивительное совпадение всех мартиггаловых характеристик с эргодическими, со всеми точными константами.

**ПЕРВЫЕ ЧЕТЫРЕ ПОДХОДА К УНИФИКАЦИИ.** Мартиггаловая формулировка эргодических теорем М. Джерисона (1955). Суммирование по Абелю Ж.-К. Рота (1962). Унифицированное максимальное неравенство А. и К. Ионеску-Тулъча (1963). Связь с действиями локально конечных групп А.М. Вершика (1960-е).

**МАРТИГГАЛЬНО-ЭРГОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ (5-Й ПОДХОД, 1998).** Унифицирующие мартиггалово-эргодические процессы: сходимость по норме и п.в. Максимальные и доминантные неравенства. Необходимость условия интегрирования супремума процесса для сходимости п.в. (Г. Аргирис, Дж.М. Розенблатт). Геометрическая и физическая интерпретации мартиггалово-эргодических процессов. Аналоги для действий решеток сжатий в пространствах суммируемых функций.

**ЭРГОДИКО-МАРТИГГАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ (6-Й ПОДХОД, 2006).** Сравнение 5-го подхода с подходом Ж.-К. Рота. Эргодико-мартиггаловые процессы: сходимость по норме и п.в. Максимальные и доминантные неравенства. Необходимость условия интегрирования супремума процесса для сходимости п.в. Геометрическая и физическая интерпретации эргодико-мартиггаловых процессов.

**НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ.** Константы в максимальном и доминантном неравенствах для унифицирующих мартиггалово-эргодических и эргодико-мартиггаловых процессов. Сходимость п.в. в случае коммутирования операторов эргодического усреднения и условного математического ожидания в этих процессах (т.е. случай инвариантности фильтрации).

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Krengel U. Ergodic theorems. Berlin; New York: W. de Gruyter, 1985.
2. Ширяев А.Н. Вероятность. М: Наука, 1989.

3. Качуровский А.Г. Мартингально-эргодическая теорема // Мат. заметки, 1998. Т. 64, №2. С. 311-314.
4. Качуровский А.Г. Единые теории, унифицирующие эргодические средние и мартингалы // Труды МИАН, 2007. Т. 256. С. 172-200.
5. Подвигин И.В. Мартингально-эргодические и эргодико-мартингальные процессы с непрерывным временем // Мат. сборник, 2009. Т. 200, №5. С. 55-70.

## **Скорости сходимости в эргодических теоремах (семинар)**

Руководитель: д.ф.-м.н., доцент Качуровский А.Г.

На семинаре докладываются оригинальные работы участников семинара (в том числе, преподавателей, аспирантов и магистрантов кафедры геометрии и топологии, кафедры теории функций и кафедры математического анализа), а также реферируются статьи по тематике семинара.

Научно-исследовательский семинар посвящен изучению эргодических теорем. Среди основных вопросов, обсуждаемых на семинаре:

**ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ.** Индивидуальная эргодическая теорема Биркгофа и статистическая эргодическая теорема фон Неймана. Единицы измерения скоростей сходимости в предельных теоремах. Отрицательные результаты Кренгеля и Халаша. Невозможность получения равномерных оценок скоростей.

**СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ ФОН НЕЙМАНА.** Формулы фон Неймана точного вычисления нормы отклонения эргодических средних от предела по спектральной мере усредняемой функции относительно динамической системы, и по корреляционным коэффициентам. Вычисление асимптотики скоростей сходимости по особенности в нуле спектральной меры, и по скорости убывания корреляционных коэффициентов. Работы В.Ф. Гапошкина и В.П. Леонова.

**КОНСТАНТЫ ОЦЕНОК В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ ФОН НЕЙМАНА.** Константы, связывающие степенную скорость сходимости --- и степенную же, с тем же показателем степени, особенность в нуле спектральной меры. Константы оценок степенной скорости сходимости по степенной и экспоненциальной скорости убывания корреляционных коэффициентов. Исследование этих констант на точность.

**СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ БИРКГОФА.** Асимптотические оценки степенной скорости по степенной особенности спектральной меры в нуле, и по степенной скорости убывания корреляционных коэффициентов. Невозможность получения точной оценки асимптотики скорости сходимости по спектральной мере и корреляционным коэффициентам. Стохастические меры стационарных процессов.

**КОНСТАНТЫ ОЦЕНОК В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ БИРКГОФА.** Сравнение различных имеющихся подходов к получению оценок и их констант. Работы В.Ф. Гапошкина. Константы оценок степенной скорости сходимости по степенной особенности в нуле спектральной меры усредняемой функции относительно динамической системы, и по степенному и экспоненциальному убыванию корреляционных коэффициентов.

**НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ.**

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Sinai Ya.G. (editor). Dynamical systems, ergodic theory and applications. Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol. 100. Springer-Verlag, 2000.
2. Качуровский А.Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // УМН,

1996. Т. 51,

№ 4. С. 73-124.

3. Гапошкин В.Ф. О скорости убывания вероятностей  $\varepsilon$ -уклонений средних

стационарных процессов // Мат. заметки, 1998. Т. 64, №3. С. 366-372.

4. Качуровский А.Г., Решетенко А.В. О скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем // Мат. сборник, 2010. Т. 201, №4. С. 25-32.

5. Качуровский А.Г., Седалищев В.В. О константах оценок скорости сходимости в

эргодической теореме фон Неймана // Мат. заметки, 2010. Т. 87, №5. С. 756-763.

## **Булевозначный анализ и гипотеза континуума**

Автор: Гутман Александр Ефимович, д.ф.-м.н., профессор ММФ НГУ.

Курс ориентирован на студентов 3—4 курсов, а также магистрантов и аспирантов.

Курс ставит своей целью усвоение студентами основных понятий и фактов теории булевозначных моделей и применение этой теории для доказательства относительной совместности гипотезы континуума с теорией множеств ZFC Цермело — Френкеля.

Знакомство с булевозначным анализом предваряется изложением основ теории множеств и теории формальных языков, в рамках которой, в частности, вводится понятие формального определения как семантического расширения контекстно-свободной грамматики и обосновывается метод консервативного расширения теории, позволяющий рассматривать в теории множеств классы, зависящие от параметров. Вводится и изучается понятие внутренней модели теории множеств и излагается соответствующий метод доказательства относительной совместности теорий. Изучение основ теории булевозначных моделей начинается с экскурса в теорию булевых алгебр. Основное внимание уделяется полным булевым алгебрам и их стоуновскому представлению. Первый семестр курса завершается изучением основных свойств булевозначных моделей. Во втором семестре рассматривается важный пример функциональной булевозначной модели, состоящей из сечений расслоения двузначных моделей. Затем формулируются основные принципы булевозначного анализа и устанавливаются их следствия. После освоения метода подъема и спуска вводится ключевое понятие булевозначного универсума, для которого затем устанавливается истинность всех аксиом теории множеств ZFC. Завершающая часть курса посвящена освоению техники канонического погружения, изучению свойств коэновской булевозначной модели и доказательству истинности отрицания гипотезы континуума в этой модели.

### Содержание курса:

1. Основы теории множеств. (Экскурс в теорию предикатов. Аксиоматика теории множеств. Общие принципы индукции и рекурсии. Индукция и рекурсия по структуре формулы. Экскурсы в теорию моделей). (4 часа)
2. Основы теории формальных языков. (Порождающая грамматика. Контекстно-свободная грамматика. Дерево вывода. Однозначные грамматики. Грамматика языка теории множеств. Понятие формального определения. Примеры формальных определений. Понятие класса. Классы, зависящие от параметров). (6 часов)
3. Метод консервативного расширения. (Понятие консервативного расширения. Обоснование метода консервативного расширения с помощью теоремы о дедукции и теоремы Гёделя о полноте. Примеры консервативных расширений. Введение классов как консервативное расширение.) (4 часа)
4. Внутренние модели. (Понятие внутренней модели. Истинность во

- внутренней модели. Модель одной теории в другой. Модель правил вывода. Модель теории предикатов. Доказательство относительной совместности теории построением внутренней модели.) (6 часов)
5. Булевы алгебры. (Упорядоченные множества. Булевы алгебры. Основные свойства булевых алгебр. Порядковый изоморфизм. Фильтры и ультрафильтры. Теорема Стоуна о представлении булевой алгебры.) (4 часа)
  6. Полные булевы алгебры. (Примеры полных и неполных булевых алгебр. Свойства полных булевых алгебр. Экскурс в общую топологию. Экстремально несвязные компакты. Стоуновское представление полной булевой алгебры. Мощность стоуновского компакта. Неполнота бесконечных счетных булевых алгебр. Пополнение булевой алгебры. Принцип исчерпывания. Булевы алгебры счетного типа.) (6 часов)
  7. Булевозначные модели. (Понятие булевозначной модели сигнатуры. Оценка истинности в булевозначной модели. Внешние термы в оценке истинности. Булевозначные модели правил вывода, пропозиционального исчисления и исчисления предикатов. Отделимые модели. Теорема Фреге-Рассела-Скотта. Факторизация модели.) (6 часов)
  8. Функциональная булевозначная модель. (Определение функциональной модели. Теорема о поточечной истинности. Свойства двузначных и многозначных моделей. Расслоение двузначных моделей. Теорема о поточечной истинности для расслоений.) (4 часа)
  9. Принципы булевозначного анализа. (Принцип перемешивания. Принцип максимума. Теорема о кванторе всеобщности. Стоуновское представление булевозначной модели. Теорема о поточечной истинности для стоуновской модели.) (6 часов)
  10. Подъемы и спуски. (Понятие подъема множества и спуска элемента. Свойства подъемов и спусков. Понятие подъема с весами. Принцип подъема. Понятие булевозначного универсума Соловея-Тенненбаума. Взаимосвязи между принципами булевозначного анализа. Циклические элементы и их свойства.) (4 часа)
  11. Булевозначный универсум как модель ZF. (Истинность аксиом объединения, выделения, степени, подстановки и бесконечности. Проблема аксиомы регулярности.) (6 часов)
  12. Аксиома выбора в булевозначном универсуме. (Экстенциональные функции и их свойства. Подъем экстенциональной функции. Спуск булевозначной функции. Истинность аксиомы выбора.) (4 часа)
  13. Каноническое погружение. (Определение канонического погружения в булевозначный универсум. Несчетность канонического погружения несчетного кардинала. Понятие коэновской модели. Оценка мощности канонического погружения в коэновской модели.) (6 часов)
  14. Коэновская булева алгебра. (Булева алгебра регулярных открытых множеств и ее свойства. Тихоновская степень топологического пространства и ее свойства. Истинность отрицания гипотезы континуума в коэновской модели.) (6 часов).

## Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### а) основная литература:

2. А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе. *Введение в булевозначный анализ*. М.: Наука, 2005.
3. Ю. И. Манин. *Доказуемое и недоказуемое*. М.: Советское радио, 1979.
4. Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. *Математическая логика*. СПб.: Лань, 2005.
5. T. Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition*. New York: Springer, 2003.
6. G. Boolos, R. Jeffrey. *Computability and Logic*. 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
7. Дж. Барвайс (ред.). *Справочная книга по математической логике. Часть I. Теория моделей*. М.: Наука, 1982.
8. Дж. Барвайс (ред.). *Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств*. М.: Наука, 1982.

### б) дополнительная литература:

1. G. Rozenberg, A. Salomaa. *Handbook of Formal Languages. Vol. 1*. – New York: Springer-Verlag, 1997.
2. A. Salomaa. *Formal Languages*. – San Diego: Academic Press Professional, 1987.

### в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

1. А. Е. Гутман. *Булевозначный анализ и гипотеза континуума*. (Динамически обновляемый файл конспектов лекций.)

## Конструктивный универсум и гипотеза континуума

Автор - д.ф.-м.н., профессор Гутман А.Е.

Курс ставит своей целью усвоение студентами основных понятий и фактов теории конструктивных множеств Гёделя и применение этой теории для доказательства относительной совместности гипотезы континуума с теорией множеств Цермело — Френкеля.

Знакомство с теорией конструктивных множеств предваряется изложением основ теории формальных языков, в рамках которой, в частности, вводится понятие формального определения как семантического расширения контекстно-свободной грамматики. Понятие внутренней модели формализуется в виде соответствующего семантического расширения грамматики языка теории множеств. Затем определяется класс конструктивных множеств (по Гёделю) и изучаются его основные свойства. В рамках теории ZF доказывается, что класс конструктивных множеств является внутренней моделью теории ZFC. Курс завершается доказательством истинности гипотезы континуума в конструктивном универсуме. В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- знать основные понятия теории формальных языков и теории внутренних моделей;
- ориентироваться в аксиоматике теории множеств;
- знать основные понятия и факты теории конструктивных множеств;
- владеть методами доказательства относительной совместности теорий и, в частности, совместности гипотезы континуума с теорией множеств Цермело — Френкеля.

### Содержание курса:

1. Основы теории формальных языков. (Порождающая грамматика. Контекстно-свободная грамматика. Дерево вывода. Однозначные грамматики. Грамматика языка теории множеств. Понятие формального определения. Примеры. Термы, зависящие от параметров.)
2. Внутренние модели. (Понятие внутренней модели. Истинность во внутренней модели. Стандартные модели. Модель одной теории в другой. Доказуемая истинность аксиом теории предикатов. Сохранение доказуемой истинности правилами вывода. Доказательство относительной совместности теории построением внутренней модели.)
3. Понятие конструктивного универсума. (Кумулятивная иерархия фон Неймана. Внутренние формулы. Свободные переменные и подстановка внутренней константы. Внутренние предложения и предикаты. Внутренняя истинность. Определимые множества. Класс конструктивных множеств.)
4. Свойства конструктивного универсума. (Кодирование формул. Связь внешней и внутренней определимости. Определимость конечных множеств. Существование неопределимых множеств. Транзитивность конструктивных этажей. Соотношения между конструктивными этажами. Ограниченные и абсолютные формулы. Примеры абсолютных формул.)

5. Конструктивный универсум как модель. (Истинность аксиом экстенциональности, объединения и степени. Конструктивная версия принципа отражения. Истинность аксиом подстановки, бесконечности и регулярности.)
6. Аксиома выбора в конструктивном универсуме. (Аксиома конструктивности. Вполне упорядоченные множества и лексикографический порядок. Вполне упорядочиваемость конструктивных этажей. Истинность аксиомы выбора. Глобальное вполне упорядочение конструктивных этажей. Абсолютно упорядоченные этажи.)
7. Гипотеза континуума в конструктивном универсуме. (Элементарно эквивалентные подмодели этажей. Определение и свойства эpsilon-изоморфизма. Индукция и рекурсия по фундированному порядку. Лемма о конденсации. Абсолютность определимости. Истинность гипотезы континуума.)

### Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

#### а) основная литература:

1. Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. *Математическая логика*. СПб.: Лань, 2005.
2. T. Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition*. New York: Springer, 2003.
3. G. Boolos, R. Jeffrey. *Computability and Logic*. 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
4. Дж. Барвайс (ред.). *Справочная книга по математической логике. Часть I. Теория моделей*. М.: Наука, 1982.
5. Дж. Барвайс (ред.). *Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств*. М.: Наука, 1982.

#### б) дополнительная литература:

6. G. Rozenberg, A. Salomaa. *Handbook of Formal Languages. Vol. 1*. – New York: Springer-Verlag, 1997.
7. A. Salomaa. *Formal Languages*. – San Diego: Academic Press Professional, 1987.

#### в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

8. А. Е. Гутман. *Конструктивный универсум и гипотеза континуума*. (Динамически обновляемый файл конспектов лекций.) – url: <http://math.nsc.ru/LBRT/g2/files/CUandCH.pdf>

## **Семинар лаборатории функционального анализа**

Руководитель - д.ф.-м.н., профессор Гутман А.Е.

На семинаре докладываются оригинальные работы участников семинара (в том числе, преподавателей, аспирантов и магистрантов кафедры геометрии и топологии, кафедры теории функций и кафедры математического анализа), а также реферируются статьи по тематике семинара.

Научно-исследовательский семинар посвящен изучению функционального и математического анализа. Среди основных вопросов, обсуждаемых на семинаре: функциональный анализ, теория операторов, нестандартные методы анализа.

## **Однозначная определенность выпуклых поверхностей(семинар)**

Автор - д.ф.-м.н., профессор КОПЫЛОВ А.П.

На семинаре докладываются оригинальные работы участников семинара (в том числе, преподавателей, аспирантов и магистрантов кафедры геометрии и топологии, кафедры теории функций и кафедры математического анализа), а также реферируются статьи по тематике семинара.

Научно-исследовательский семинар посвящен современному направлению исследований, лежащему на стыке классического анализа и геометрии.

# Курсы кафедры прикладной математики

## Дополнительные главы теории меры и интеграла

Автор – д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН Плотников П.И.

Раздел 1. Мера. Общая теория.

1. 1.  $\sigma$ -алгебра, алгебра Борелевских множеств. Аддитивные и  $\sigma$ -аддитивные функции.

1. 2. Мера. Разложение меры на атомарную и неатомарную части. Теорема Каратеодори. Внешние меры. Конструкция Каратеодори. Мера на метрических пространствах. Мера Стильеса.

1.3. Регулярные меры. Меры Бореля и Радона. Теорема де Джорджи о регулярных мерах. Продолжение аддитивных функций на  $\sigma$ -алгебру.

Раздел 2. Измеримые функции и интегралы.

2.1. Борелевские функции. Интеграл от Борелевской функции по Борелевской мере.

2.2. Лебеговское расширение Борелевской меры. Измеримые функции. Интеграл от измеримой функции.

2.3. Теорема Лебега об интегрировании монотонной последовательности.

2.4. Теорема Лебега о доминантной сходимости интеграла.

Раздел 3. Разложение мер. Дифференцирование мер.

3.1. Теорема Радона-Никодима о дифференцировании мер. Теорема де Джорджи о разложении  $\sigma$ -аддитивных функций.

3.2. Теорема Тонелли. Общая теорема о дезинтегрировании мер. Следствия: теорема Фубини, понятие условной вероятности.

3.3. Теорема о покрытиях. Дифференцирование мер в  $\mathbb{R}^n$ . Теорема Лебега о дифференцировании меры в  $\mathbb{R}^n$ .

Раздел 4. Пространства мер.

4.1. Знаконеопределенные меры (заряды). Теорема Хана и Жордана о разложении знаконеопределенных мер.

4.2. Теорема Рисса о представлении линейного функционала в пространствах непрерывных функций.

4.3. Банаховы пространства борелевских мер. Слабая сходимость. Теорема Прохорова.

Раздел 5. Пространства Лебега.

5.1. Основные свойства. Неравенства. Сильная сходимость.

5.2. Теорема Егорова. Равностепенно интегрируемые множества функций. Компактные множества в пространствах Лебега. Критерий Валле-Пуссена.

5.3. Сопряженные пространства к пространствам Лебега. Теорема Рисса для пространств Лебега.

5.4. Слабая сходимость в пространствах Лебега. Слабая сходимость в  $L_1$ . Слабая

сходимость в  $L_\infty$ .

5.5. Байтинг сходимость. Байтинг лемма.

Раздел 6. Меры Янга.

6.1. Случайные переменные и случайные функции.

6.2. Меры Янга и их основные свойства.

6.3. Фундаментальная теорема Тартара о мерах Янга и ее обращение.

Раздел 7. Приложения.

7.1. Выпуклые задачи оптимизации. Выпуклые множества и функции.

7.2. Субдифференциалы. Свойство регулярности выпуклых функций.

7.3. Минимизация выпуклых интегральных функционалов.

7.4. Невыпуклые задачи. Релаксация. Теорема Тихомирова-Иоффе. Теорема Тартара.

### **Литература**

1. Evans L. Measure theory and fine properties of functions. CRS Press. Boca-Baton Fl. (1992). 286 с.

2. Эдвардс Р. Функциональный анализ: теория и приложения. М., Мир, 1969, 783 с.

3. Экланд Р., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М., Мир, 1973, 399 с.

4. Fonseca I. Modern methods in the calculus of variations. Springer, N-Y, 2007, 599 с.

# **Нелинейные полугруппы и уравнения диффузии**

Автор – д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН Плотников П.И.

## Раздел 1. Монотонные операторы

1.1. Двойственность в нормированных пространствах.

1.2. Монотонные операторы. Обратимость монотонного коэрцитивного хеминепрерывного оператора.

## Раздел 2. Многозначные отображения.

2.1. Монотонные многозначные операторы, максимальные монотонные многозначные операторы.

2.2. Теорема о резольвенте монотонного многозначного максимального оператора. M-аккретивные операторы. Аппроксимация Иосиды.

## Раздел 3. Нелинейные полугруппы.

3.1. Сжимающая полугруппа, порожденная монотонным многозначным максимальным оператором.

3.2. Существование и единственность полугруппового решения задачи Коши для эволюционного уравнения с монотонным многозначным максимальным оператором.

3.3. Область определения полугруппы, дифференцируемость решения задачи Коши по временной переменной.

## Раздел 4. Приложения.

3.1. Уравнения нелинейной диффузии. Задача Стефана. Энтальпийная формулировка.

3.2. Теоремы существования, единственности и устойчивости решения задачи Стефана.

## **Литература**

1. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу, М., Мир, 1977.

2. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ, М., Мир, 1988.

3. Нелинейные полугруппы, (сб. статей), М., Мир, 1986.

4. Visintin A. Models of Phase transitions, Boston, Birkhauser, 1996.

# Дополнительные главы анализа и дифференциальных уравнений с частными производными

Автор – д.ф.-м.н., профессор Белоносов В.С.

## Глава I. Функциональные пространства $C^k$ и $L_p$

§1. Пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций  $C(\bar{\Omega})$  и  $C^k(\bar{\Omega})$ . Полнота, сепарабельность. Усреднения и их простейшие свойства.

§2. Пространство  $L_p(\Omega)$ . Классы функций, совпадающих почти всюду. Определение нормированного пространства  $L_p(\Omega)$  и доказательство его полноты. Плотность  $C(\bar{\Omega})$  в  $L_p(\Omega)$ , сепарабельность  $L_p(\Omega)$  и непрерывность в среднем элементов  $L_p(\Omega)$ . Усреднение функций из  $L_p(\Omega)$ , плотность  $C_0^\infty(\Omega)$  в  $L_p(\Omega)$ . Пространство  $L_{p,loc}(\Omega)$ .

## Глава II. Обобщенные производные

§1. Определение обобщенных производных. Примеры существования и несуществования обобщенных производных. Производные высокого порядка. Обобщенные производные в подобласти и в объединении областей.

§2. Обобщенные производные и средние функции. Связь обобщенных производных с конечно-разностными отношениями.

## Глава III. Пространства Соболева $W_p^k$

§1. Определение пространства  $W_p^k(\Omega)$ . Полнота пространства  $W_p^k(\Omega)$  и усреднение его элементов. Плотность  $C^\infty(\bar{\Omega})$  в  $W_p^k(\Omega)$ , когда  $\Omega$  – прямоугольный параллелепипед.

§2. Продолжение функций из  $C^k(\bar{\Omega})$  и  $W_p^k(\Omega)$  за границы рассматриваемых областей с сохранением гладкости. Плотность  $C^\infty(\bar{\Omega})$  в  $W_p^k(\Omega)$ .

§3. Следы функций из  $W_p^k(\Omega)$  на гладких  $(n-1)$ -мерных поверхностях. Интегрирование по частям в пространстве  $W_p^k(\Omega)$ . Пространство  $W_p^0(\Omega)$ .

§4. Лемма С.Л. Соболева. Теоремы вложения пространств  $W_p^l(\Omega)$  в  $C(\bar{\Omega})$  и  $C^k(\bar{\Omega})$ .

§5. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса. Компактность вложения пространства  $W_2^1(\Omega)$  в  $L_2(\Omega)$ . Неравенство Стеклова и эквивалентная нормировка пространства  $W_2^0(\Omega)$ .

## Глава IV. Краевые задачи для эллиптических уравнений

§1. Постановки основных краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Определение обобщенных решений.

§2. Обобщенная задача Дирихле. Неравенство Гординга. Теорема Лакса–Мильграма о представлении линейных функционалов в гильбертовом пространстве. Сведение обобщенной задачи Дирихле к уравнению Фредгольма в пространстве  $W_2^0(\Omega)$ .

§3. Гладкость обобщенных решений внутри области. Классические решения.

#### **Глава V. Начально-краевые задачи для эволюционных уравнений**

§1. Постановка начально-краевых задач для гиперболических и параболических уравнений второго порядка. Обобщенные решения, теорема единственности.

§2. Метод Галеркина решения начально-краевой задачи для гиперболических уравнений. Существование приближенных решений, их оценки и слабая сходимость к обобщенному решению.

#### **Глава VI. Обобщенные функции**

§1. Пространство основных функций  $D(\Omega)$ . Определение обобщенной функции. Примеры.

§2. Пространство обобщенных функций  $D'(\Omega)$ , сходимость обобщенных функций, полнота пространства  $D'(\Omega)$ .

§3. Носитель обобщенной функции, умножение обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций. Свойства и примеры.

§4. Пространство Шварца быстро убывающих функций, инвариантность относительно преобразования Фурье. Обобщенные функции медленного роста, примеры. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Построение фундаментальных решений для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

#### **Литература**

1. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд. – М: Наука, 1988.
2. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных.– М: Наука, 1983.
3. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа.– М: Мир, 1968.
4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. 5-е изд., испр. и дополн.– М: Наука, 1988.

# Спектральная теория дифференциальных операторов

Автор – д.ф.-м.н., профессор Белоносов В.С.

§1. Замкнутые операторы в гильбертовых пространствах. График оператора. Замыкание.

§2. Сопряженный оператор. Его свойства и график. Эрмитовы и симметрические операторы.

§3. Дефектные подпространства симметрического оператора. Преобразование Кэли.

§4. Область определения сопряженного оператора. Формула фон Неймана. Индекс дефекта.

§5. Описание симметрических расширений симметрического оператора. Необходимое и достаточное условие существования самосопряженных расширений.

§6. Самосопряженные дифференциальные выражения. Формула Лагранжа. Разложения функции Лагранжа по системам Дирихле.

§7. Операторы  $A$  и  $A_0$ , порожденные самосопряженным дифференциальным выражением. Ортогональное дополнение к области значений оператора  $A_0$ .

§8. Равенства  $A_0^* = A$  и  $A^* = A_0$ .

§9. Самосопряженные расширения оператора  $A_0$ .

§10. Описание самосопряженных расширений при помощи граничных условий.

§11. Операторы с простым спектром. Пространство  $L_\sigma^2$  и оператор  $\Lambda_\sigma$ . Каноническая форма оператора с простым спектром.

§12. Разложение по собственным функциям. Направляющие функционалы. Формулы обращения. Формулы для спектральной функции распределения.

§13. Обратная задача Штурма–Лиувилля. Ортогонализирующие ядра. Интегральные уравнения для ортогонализирующих ядер.

§14. Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля. Условия на спектральную функцию распределения. Основная теорема. Различные обобщения основной теоремы.

## Литература

1. М.А. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.
2. Б.М. Левитан. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. – М.: Наука, 1984.

# **Вариационные методы в математической физике**

Автор – д.ф.-м.н., профессор Белоносов В.С.

## **Часть I. Элементы классического вариационного исчисления**

§1. Простейшая задача вариационного исчисления. Слабый и сильный экстремумы. Примеры.

§2. Первая вариация. Необходимое условие экстремума. Лемма Дюбуа–Реймона. Уравнение Эйлера, экстремали.

§3. Примеры несуществования решения. Дважды гладкие экстремали, условие Лежандра.

§4. Изопериметрическая задача. Условный экстремум.

§5. Квадратичные функционалы. Вторая вариация. Неотрицательность второй вариации – необходимое условие слабого экстремума.

§6. Уравнение Якоби, сопряженные точки. Необходимое и достаточное условие положительной определенности квадратичного функционала. Достаточные условия слабого экстремума.

§7. Поле экстремалей. Уравнение Гамильтона–Якоби. Инвариантный интеграл Гильберта.

§8. Функция Вейерштрасса. Необходимые условия сильного экстремума. Достаточные условия сильного экстремума.

§9. Прямые методы вариационного исчисления. Минимизирующая последовательность. Случай полунепрерывного функционала. Метод Ритца.

§10. Построение собственных функций оператора Штурма–Лиувилля методом Ритца.

## **Часть II. Вариационные методы для уравнений с частными производными**

§1. Положительные операторы в гильбертовых пространствах. Энергетическое пространство положительно определенного оператора.

§2. Теорема о функционале энергии. Обобщенное решение задачи о минимуме функционала энергии.

§3. Минимизирующая последовательность и ее сходимости. Метод Ритца. Вариационно-разностные методы.

§4. Основные краевые задачи для эллиптических уравнений. Принцип минимума потенциальной энергии в теории упругости. Приложения к задачам об изгибе тонких пластинок.

§5. Задача о собственных значениях. Ее связь с задачами о собственных колебаниях и об устойчивости системы. Энергетические теоремы в проблеме собственных чисел. Минимаксимальный принцип.

§6. Метод Бубнова–Галеркина. Достаточные признаки сходимости. Приложения к эллиптическим и эволюционным задачам.

§7. Метод наименьших квадратов. Применение к интегральным уравнениям. Задачи теории потенциала и теории упругости.

### **Литература**

1. В.И. Смирнов, В.И. Крылов, Л.В. Канторович. Вариационное исчисление. Л.: ЛГУ, 1933.
2. И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. Вариационное исчисление. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.
3. С.Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.

# **Асимптотические методы теории возмущений и их приложения**

Автор – д.ф.-м.н., профессор Белоносов В.С.

**Введение.** Элементы теории почти периодических функций. Спектр и ряд Фурье почти периодической функции. Классический метод усреднения Крылова–Боголюбова. Проблема малых знаменателей.

**Спектральные свойства обобщенных функций.** Элементы теории обобщенных функций. Преобразование Фурье основных и обобщенных функций. Свертка и ее свойства. Спектр обобщенной функции. Примеры. Связь со спектром почти периодической функции. Разложение обобщенной функции в сумму быстро и медленно осциллирующих слагаемых. Дифференцирование этого разложения. Обобщение теоремы Фавара о первообразной.

**Модификация метода Крылова–Боголюбова.** Вспомогательные леммы. Существование замены переменных со специальными спектральными свойствами. «Укороченное» уравнение. Оценки погрешности модифицированных приближений Крылова–Боголюбова. Случай почти периодических функций.

**Параметрический резонанс.** Абстрактное гиперболическое уравнение с периодическим возмущением. Построение первого приближения в смысле Крылова–Боголюбова. Критические частоты, параметрический резонанс и области динамической неустойчивости. Границы областей динамической неустойчивости в пространстве параметров «частота–амплитуда». Приложения к обоснованию волновых методов интенсификации добычи нефти.

**Математическая теория фазовых колебаний.** Особенности параметрической неустойчивости в нелинейном случае. Фазовые колебания. Второе модифицированное приближение Крылова–Боголюбова. Разложение решений системы второго приближения на быстрые и медленные компоненты. Конечномерные уравнения фазовых колебаний быстрых компонент. Качественная картина фазовых колебаний в случае простого основного резонанса. Методы численного анализа, основанные на решении системы фазовых колебаний.

## **Литература**

1. Б.М. Левитан, В.В. Жиков, Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. Изд-во Московского университета, Москва, 1978.
2. С. Corduneanu, Almost Periodic Functions, Second English Edition, Chelsea Publishing Company, New York, 1989.
3. Математика и нелинейная механика. Т. 3. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, М.: Наука, 2005.
4. Л. Хёрмандер, Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 1. Теория распределений и анализ Фурье. Мир, Москва, 1986.

5. В.С. Белоносов, В.Н. Доровский, А.С. Белоносов, С.В. Доровский, Гидродинамика газосодержащих слоистых систем, Успехи механики, том 3, № 2, 2005, 37–70.

## **Нелинейные операторные и дифференциальные уравнения.**

Автор – д.ф.-м.н., профессор Налимов В.И.

### **I. Основные понятия и сведения из функционального анализа.**

Топологические и метрические пространства. Банаховы и гильбертовы пространства. Пространства Соболева. Обобщенные функции. Компактность и теоремы вложения. Интеграл Бохнера.

### **II. Краевые задачи как операторные уравнения.**

### **III. Уравнения с монотонным оператором.**

Основные понятия теории монотонных операторов. Примеры. Теоремы существования. Максимальные монотонные операторы. Метод Галеркина и итерационные методы. Монотонные потенциальные операторы. Критерий потенциальности. Примеры. Градиентный метод.

### **IV. Нестационарные задачи.**

Задачи с начальными и краевыми условиями как операторные уравнения. Примеры.

### **V. Теоремы существования и единственности решения**

для параболических и псевдо параболических уравнений ( $L^2$ -теория). Метод Галеркина и итерационный метод.

### **VI. Эволюционные уравнения.**

Задачи с начальными условиями. Периодические решения. Теоремы регулярности. Аппроксимация.

### **VII. Операторные уравнения второго порядка.**

Теоремы существования и единственности. Теоремы регулярности. Специальные базисы.

## **Некоторые методы решения нелинейных краевых задач**

Автор – д.ф.-м.н., профессор Старовойтов В.Н.

### **1. Предварительные сведения.**

Банаховы и гильбертовы пространства. Сопряженные пространства. Сильная и слабая сходимости. Сильная и слабая компактность.

Пространства интегрируемых функций, пространство распределений, пространства Соболева. Теоремы вложения, некоторые неравенства.

### **2. Метод компактности.**

Постановка начально-краевой задачи для одного нелинейного гиперболического уравнения. Функциональные пространства. Понятие обобщенного решения.

Теорема о существовании обобщенного решения задачи. Метод Галеркина.

Единственность обобщенного решения.

Теорема Обэна о компактности.

Функциональные пространства гидродинамики. Постановка начально-краевой задачи для системы уравнений Навье – Стокса.

Обобщенная разрешимость краевой задачи для уравнений Навье – Стокса.

Единственность обобщенного решения задачи в двумерном случае.

### **3. Метод монотонности.**

Понятие монотонного оператора. Монотонность потенциальных операторов.

Применение метода монотонности к доказательству разрешимости краевой задачи для одного квазилинейного параболического уравнения.

Единственность решения.

Один общий результат об однозначной разрешимости абстрактного параболического уравнения с монотонным оператором.

Метод монотонности в стационарных задачах. Разрешимость абстрактного нелинейного эллиптического уравнения с монотонным оператором.

Единственность решения.

### **4. Метод штрафа.**

Задача о минимуме функционала на выпуклом множестве и ее решение с помощью метода штрафа. Эллиптические вариационные неравенства.

Применение метода штрафа к дифференциальным уравнениям. Решение начально-краевой задачи для параболического уравнения в нецилиндрической области.

### **5. Метод полудискретизации параболических уравнений.**

Модель фазового поля. Доказательство разрешимости краевой задачи для модели фазового поля методом полудискретизации.

### **6. Метод регуляризации.**

Задача Стефана с поверхностным натяжением и ее регуляризация моделью фазового поля. Теоремы Плотникова и Решетняка. Гамма-сходимость. Техника Модики и Лукхауса. Предельный переход к капиллярной задаче Стефана.

Решение транспортного уравнения методом сглаживания коэффициента.

Ренормализованное решение. Лемма об усреднении конвективного члена.

Решение транспортного уравнения методом параболической регуляризации.

**Литература.**

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Изд-во Едиториал УРСС, 2010.
2. Темам Р. Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
3. Плотников П.И., Старовойтов В.Н. Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля. – Дифф. уравнения, 1993, Т. 29, № 3, С. 461-471.
4. Luckhaus S., Modica L. The Gibbs – Thomson relation within the gradient theory of phase transitions. – Arch. Rat. Mech. Anal., 1988, V. 107, P.71-83.
5. DiPerna R.J., Lions P.-L. Ordinary differential equations, Sobolev spaces and transport theory. – Invent. Math., 1989, V. 98, P. 511-547.

## Математические модели теории фильтрации

Автор – к.ф.-м.н., доцент Капранов Ю.И.

Основная цель - развитие навыков применения методов математического моделирования на примере описания широкого круга явлений, связанных с перемещениями жидкостей и газов сквозь пористые материалы.

Основные задачи курса

- классификация механизмов, определяющих наиболее характерные особенности рассматриваемого круга явлений;
- использование развитых к настоящему времени средств переложения конкретной проблемы на язык дифференциальных уравнений.

По окончании изучения спецкурса студент должен

- иметь представление об основных типах фильтрационных течений,
- знать содержание наиболее часто используемых на практике модельных представлений,
- уметь формулировать соответствующие начальные и краевые условия, и для изучения качественных особенностей течений применять ряд известных методов построения точных и приближённых решений.

**Итоговый контроль.** Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрен дифференцированный зачет.

**Текущий контроль.** Качество усвоения студентами материала спецкурса проверяется постоянно в процессе параллельной работы учебного спецсеминара "Движение жидкостей и газов в пористых средах".

Предлагаемый курс охватывает широкий спектр современных моделей фильтрационных течений. Изложение ряда из них отсутствует в учебной литературе и может быть найдено только в оригинальных работах. Особенностью спецкурса является также и то, что в нём делается упор на выделении основных механизмов рассматриваемого круга явлений, выяснении возможностей применяемых моделей. Необходимость в изучении подобных явлений вызвана в значительной степени запросами практики. Особенно актуально это в проблемах, связанных с распространением загрязнений в почвах и грунтах, подземным захоронением вредных отходов, в ряде технологических методов разработки полезных ископаемых, в вопросах нефтегазодобычи, при анализе методов очистки жидкостей от содержащихся в них примесей.

### Тематический план курса.

Наименование разделов и тем	Лекции
Вводная часть	0.5
Основные свойства и структурные представления пористых сред	1.5
Классические модели фильтрации однородной жидкости	6
Течения при неполном насыщении	2
Совместное движение двух несмешивающихся жидкостей в	7

пористой среде	
Перенос потоком растворённых в нём солей	4
Многофазные потоки	7
Течения с дополнительными особенностями	2
Итого по курсу	30

### Содержание отдельных разделов и тем.

**Основные свойства и структурные представления пористых сред:** пористость, проницаемость, удельная поверхность, гранулометрический состав, распределения поровых каналов по радиусам, идеальные среды, сетевые модели.

**Классические модели фильтрации однородной жидкости:** основные уравнения, непроницаемые границы, контур питания, свободные границы, промежуток высачивания, границы разрыва в свойствах среды, источники-стоки, скважины, границы раздела между жидкостями с различными физическими свойствами, гидравлические модели фильтрационных течений стратифицированных потоков, движения газов, течения газированной жидкости.

**Течения при неполном насыщении:** капиллярное поднятие, потенциал влажности, уравнение Ричардсона, специфика постановки начально-краевых задач.

**Совместное движение двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде:** насыщенности порового пространства фазами, относительные фазовые проницаемости, капиллярное давление, смачиваемость, её влияние на характер вытеснения, уравнение Рапопорта-Лиса, режим капиллярной пропитки, специфика граничных условий, поверхности вырождения фаз, неполнота вытеснения, приближения Бакли --- Леверетта.

**Перенос потоком растворённых в нём солей:** конвективно-диффузионный перенос, фильтрационная дисперсия, вымыв солей из грунтов, химические реакции в потоке, взаимодействие растворённых веществ с материалом пористой среды.

**Многофазные потоки:** трёхфазные системы типа вода-нефть-газ, модели несмешивающихся жидкостей, давление насыщения, режим растворённого газа, многокомпонентные многофазные течения.

**Течения с дополнительными особенностями:** трещины и блоки, обмен жидкостью между ними, особенности совместного течения двух несмешивающихся жидкостей в трещиновато-пористой среде, перенос взвесей фильтрационным потоком.

### Список основной и дополнительной литературы:

Полубаринова - Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. 2-е изд. М.: наука, 1977.

Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. Изд-во: Институт компьютерных исследований, Регулярная хаотическая динамика, 2007.

Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, М., 1964.

## Примеры вопросов к спецкурсу «Математические модели теории фильтрации»

1. Поставить задачу, моделирующую работу одиночной дрены в горизонтальном, однородном пласте конечной толщины, и построить её решение.
2. Сформулировать начально-краевую задачу о перемещении в однородной пористой среде несжимаемой жидкости при наличии свободной границы, на которой имеет место инфильтрация заданной интенсивности.
3. Применить схему гидравлического приближения для описания внедрения жидкости в сухой грунт.
4. В рамках гидравлического приближения вывести систему уравнений, описывающую изменения во времени и пространстве границы раздела между двумя несжимаемыми жидкостями и свободной границы.
5. Используя схему поршневого вытеснения сформулировать двумерную (в вертикальной плоскости) начально-краевую задачу о проникновении в пласт через горизонтальную скважину химически неактивной примеси.
6. Привести пример начально-краевой задачи, моделирующей перераспределение влаги в пористой среде при наличии в области течения зоны неполного насыщения.
7. Поставить задачу о стягивании контура нефтеносности, привести пример точного решения.
8. Вывести уравнение для распределения насыщенности порового пространства смачивающей жидкостью, привести для него пример постановки соответствующей начально-краевой задачи.
9. Сформулировать задачу, описывающую одномерный процесс замещения в пласте одной жидкости другой в условиях, когда задан перепад давлений, получив предварительно выражение для расхода.
10. Описать предельное состояние произвольного начального распределения насыщенности двухфазного потока в замкнутом однородном пласте.
11. Для случая двухфазной фильтрации в приближении Бакли-Левретта привести пример построения решения начально-краевой задачи, описывающей процесс вытеснения смачивающей жидкостью из пористой среды несмачивающей жидкости.
12. Сформулировать постановку и исследовать автомодельное решение одной из задач о капиллярной пропитке пористого образца.
13. Привести пример начально-краевой задачи, моделирующей процесс переноса химически неактивных примесей в напорном водоносном горизонте.
14. Для случая двух химически активных компонентов и одного продукта реакции выписать основные уравнения протекания обратимых реакций в жидкости, перемещающейся внутри пористой среды.
15. Привести пример постановки задачи о переносе двухфазным фильтрационным потоком поверхностно-активного вещества. Для случая одномерного течения в крупномасштабном приближении описать метод построения решения.

16. Вывести основные уравнения совместного перемещения в пористой среде трёх несмешивающихся жидкостей.
17. Сформулировать начально-краевую задачу одномерного внедрения воды в пласт, если последний в начальный момент состоял из двух однофазных зон.
18. Получить обобщение приближения Бакли-Левретта на случай фильтрации трёх несмешивающихся жидкостей. Для случая несжимаемых жидкостей исследовать тип соответствующей системы дифференциальных уравнений.
19. Использовать приближение Бакли-Левретта для описания процесса вытеснения газом из пласта смеси воды и нефти.
20. Привести пример начально-краевой задачи, моделирующей течение однородной жидкости в пласте, составленном из двух зон: однородного пористого слоя и примыкающей к нему трещиновато-пористой зоны.

# Математическое моделирование и асимптотический анализ

Авторы – д.ф.-м.н., профессор Белоносов В.С., д.ф.-м.н., профессор Сенницкий В.Л.

## I. ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

1. **Особенности исследований в естествознании (1 час).** Первые принципы. Роль эксперимента.
2. **Математические модели. Классические и новые теории (1 час).** Основные определения. Процесс построения математических моделей.
3. **Роль асимптотических методов в математическом моделировании. Примеры (2 часа).** Асимптотические разложения. Пограничный слой. Асимптотика электромагнитного поля.

## II. КЛАССИЧЕСКОЕ ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ

### ПРОСТРАНСТВО, ВРЕМЯ

1. **Принцип Галилея. Преобразование Галилея (1 час).** Равноправность инерциальных систем отсчета. Классическое правило сложения скоростей.
2. **Принцип Гамильтона (1 час).** Первая вариация действия. Уравнения Лагранжа.
3. **Свойства пространства и времени (2 часа).** Однородность времени, однородность и изотропность пространства. Свойства функции Лагранжа изолированной механической системы. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса.

### ВЕЩЕСТВО

#### А. Молекулярно-кинетическое рассмотрение

1. **Агрегатные состояния вещества (1 час).** Основные особенности движения атомов и молекул в твердом теле, жидкости и газе.
2. **Идеальный (совершенный) газ; уравнение состояния (2 часа).** Кинетическая энергия и импульс молекулы. Взаимодействие молекулы с твердой стенкой. Концентрация молекул, температура и давление газа.
3. **Парное взаимодействие молекул (1 час).** Основные особенности силового взаимодействия молекул; отталкивание и притяжение.
4. **Реальный газ; уравнение состояния (уравнение Ван-дер-Ваальса) (1 час).** Отклонение от идеальности (экспериментальные данные). Учет парного взаимодействия молекул; объем области занимаемой молекулами; дополнительное давление. Переход: уравнение состояния идеального газа – уравнение состояния реального газа.
5. **Фазовый переход: газ – жидкость (1 час).** Фазовые переходы 1-го рода; качественное рассмотрение; использование уравнения Ван-дер-Ваальса.
6. **Средняя длина свободного пробега молекулы (2 часа).** Оценка средней длины свободного пробега молекулы газа. Средняя длина свободного пробега молекулы и пространственные изменения макроскопических параметров газа.

7. **Вязкость газа и жидкости (1 час).** Явления переноса. Оценка коэффициента вязкости.

## **Б. Термодинамическое рассмотрение**

1. **Макроскопические системы; микроскопические и макроскопические состояния (1 час).** Микроскопические и макроскопические параметры. Описание макроскопических систем на микроскопическом и макроскопическом уровнях.
2. **Релаксация. Квазистатические процессы (1 час).** Термодинамическое равновесие. Процесс. Обратимость и необратимость. Равновесные значения макроскопических параметров.
3. **Основной принцип термодинамики (1 час).** Неизбежность перехода изолированной макроскопической системы в равновесное состояние.
4. **Сплошная среда; неравновесные состояния (2 часа).** Проблема описания динамики макроскопической системы. Основные составляющие гипотезы сплошной среды. Уравнения движения жидкости.

## **В. Парадоксальное поведение гидромеханических систем; асимптотические представления решений (3 часа)**

1. Динамика гидромеханических систем при периодических по времени воздействиях. Примеры постановок гидромеханических задач и асимптотических представлений их решений. Эффект парадоксального движения твердого тела в жидкости в присутствии вибрирующей твердой стенки. Явление преимущественно однонаправленного движения газового пузыря в колеблющейся жидкости.

## **ПОЛЕ**

### **А. Гравитационное поле**

1. **Энергия гравитационного поля (2 часа).** Потенциальная энергия материального шара в собственном гравитационном поле. Метод размерностей.
2. **Уравнение непрерывности для плотности гравитационного заряда (2 часа).** Закон сохранения гравитационного заряда (массы). Непрерывное распределение гравитационного заряда. Плотность потока гравитационного заряда через замкнутую поверхность.
3. **О реальности гравитационного поля (1 час).** Невозможность мгновенного распространения силового воздействия.

### **Б. Электромагнитное поле**

1. **Энергия электромагнитного поля (2 часа).** Работа необходимая для создания пары параллельных плоских зарядов. Работа необходимая для создания пары параллельных плоских токов. Полевая интерпретация энергии электромагнитной системы.
2. **Уравнение непрерывности для плотности электрического заряда (1 час).** Закон сохранения электрического заряда. Непрерывное распределе-

ние электрического заряда. Плотность потока электрического заряда через замкнутую поверхность.

- 3. Электромагнитные волны; асимптотическое поведение на больших расстояниях (3 часа).** Система уравнений Максвелла. Электромагнитные волны. Электромагнитное поле, создаваемое системой электрических зарядов и токов.
- 4. О реальности электромагнитного поля (2 часа).** Неопровержимые доказательства существования электромагнитного поля.
- 5. Сложение скоростей. Излучение атома. Границы применимости классического естествознания (2 часа).** Постоянство скорости света (экспериментальные данные). Неприменимость классического правила сложения скоростей. Вектор Поинтинга. Время жизни классического атома.

### III. НОВОЕ ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ

- 1. Основные положения специальной теории относительности (2 часа).** Принцип относительности. Пространство – время. Преобразования Лоренца. Парадоксы специальной теории относительности.
- 2. Асимптотическое представление энергии частицы (1 час).** Зависимость массы от скорости. Энергия покоя. Разложение полной энергии при малых скоростях.
- 3. Радиус электрона (1 час).** Энергия электрического поля и полная энергия электрона.
- 4. Основные положения квантовой теории (2 часа).** Состояние квантовой системы. Волновая функция. Принцип суперпозиции. Операторы физических величин. Наблюдаемые величины. Уравнение Шредингера.
- 5. Туннельный эффект (2 часа).** Задача о прохождении частицы над и под барьером.
- 6. Сверхтекучесть гелия (1 час).** Фазовые переходы 2-го рода. Спектр Ландау. Критическая скорость. Кольцевые вихри.
- 7. Ядерные взаимодействия (1 час).** Нуклоны. Потенциал Юкавы. Открытие мезона.
- 8. Асимптотический переход: квантовая механика – классическая механика (2 часа).** Уравнения Шредингера и Гамильтона – Якоби при стремлении к нулю постоянной Планка. Квазиклассическое приближение Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна.

### IV. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

- 1. Теория возмущений: общие положения, примеры (1 час).** Метод возмущений и трудности его реализации. Идеи Лагранжа, Лапласа и Вандер-Поля. Примеры.
- 2. Приведение общей задачи к стандартной форме (1 час).** Операторная экспонента, теорема Стоуна (без доказательства), метод вариации постоянных для абстрактных гиперболических уравнений.

3. **Почти периодические функции и их свойства (2 часа).** Определения почти периодических функций по Бору и по Бохнеру. Разложение в обобщенные ряды Фурье. Основная теорема теории почти периодических функций.
4. **Спектральный анализ обобщенных функций (3 часа).** Понятие обобщенной функции (повторение). Дифференцирование и преобразование Фурье обобщенных функций. Спектр. Связь с дифференцированием и сверткой. Теорема Фавара о первообразной.
5. **Метод усреднения Крылова–Боголюбова (3 часа).** Построение модифицированных приближений. Оценка погрешности приближенного решения.
6. **Приложения к уравнениям математической физики.**
  - a. **Асимптотическая теория параметрического резонанса (2 часа).** Понятие параметрического резонанса и его сравнение с «обычным» резонансом. Задачи, приводящие к изучению резонанса. Уравнение Матье.
  - b. **Критические частоты и области динамической неустойчивости для линейных уравнений (2 часа).** Первое приближение Крылова–Боголюбова для линейных уравнений, достаточные условия резонанса, границы областей динамической неустойчивости.
  - c. **Асимптотическая теория нелинейного резонанса (2 часа).** Особенности резонанса в нелинейном случае. Фазовые колебания. Математическая теория фазовых колебаний для гиперболических уравнений с квадратичными нелинейностями.

### Основная литература:

1. И.П. Базаров, *Термодинамика*. Изд-во Лань, 2010.
2. Д.И. Блохинцев, *Основы квантовой механики*, Изд-во Лань, 2004.
3. А.Н. Матвеев, *Механика и теория относительности*. 3-е изд. Изд-во: Оникс 21 век, Мир и образование, 2003.
4. И.Е. Тамм, *Основы теории электричества*. 11-е изд. М.: Физматлит, 2003.
5. Математика и нелинейная механика. Т. 3. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, М.: Наука, 2005.
6. В.И. Арнольд, *Математические методы классической механики*. Изд-во Едиториал УРСС, 2003.
7. В.И. Арнольд, В.В. Козлов, А.И. Нейштадт, «Математические аспекты классической и небесной механики», *Динамические системы – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, **3**, ВИНТИ АН СССР, М., 1985, 5–290.
8. Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*. М.: Наука, 1970.

9. В.С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*. М.: Наука, 1979.
10. В.С. Белоносов, В.Л. Сенницкий, *Математическое моделирование и асимптотический анализ*. Учебное пособие, НГУ, Новосибирск, 2013.

## **Discontinuous solutions of scalar conservation laws (на английском языке)**

Автор – к.ф.-м.н. Кузнецов И.В.

Энтропийные решения скалярных гиперболических законов сохранения. Отличительные черты энтропийных решений (из работы [1]):

- 1) энтропийные решения как предел по малому параметру семейства регуляризованных решений параболических уравнений;
- 2) в отличие от слабых решений, энтропийные решения удовлетворяют семейству неравенств;
- 3) задача Коши для скалярных гиперболических законов сохранения является корректной в классе энтропийных решений.

Энтропийные решения начально-краевых задач для гиперболических законов сохранения [2] и вырождающихся ультра-параболических уравнений [4], энтропийные решения краевых задач для уравнений с переменным направлением параболичности [5].

### **Литература:**

- [1] Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб. 1970. Т. 81(123), № 2. С. 228–255.
- [2] Malek J., Necas J., Rokyta M., Ruzicka M. Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs. Chapman & Hall. London. 1996.
- [3] Шелухин В.В. Энтропийные решения скалярных законов сохранения. Учеб. пособие. НГУ. 2002.
- [4] Саженов С.А. Энтропийные решения нелинейных задач динамики многофазных сред. Докт. дисс. Новосибирск. 2012
- [5] Kuznetsov I.V. Entropy solutions to differential equations with variable parabolicity direction // Journal of Mathematical Sciences. 2014. V. 202, Is. 1, P. 91-112

## **Математические модели механики сплошной среды (семинар)**

Автор – д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН Плотников П.И.

Изучение современного состояния работ по математическому моделированию проблем механики сплошной среды по следующим направлениям:

1. Новые материалы, моделирование процессов роста биологических объектов и искусственных материалов. Изучение нелинейных моделей динамики биологических материалов, на основе параметрической теории роста и основных принципов термодинамики.
2. Нелинейные процессы в гидроупругих структурах. Новые модели для задач о движении упругих тел в вязкой жидкости. Исследование корректности, задачи управления.
3. Динамика нелинейных сред, содержащих включения, в том числе нелинейных упругих тел с трещинами. Вопросы регулярности и качественный анализ решений.
4. Краевые задачи динамики вязких Неньютоновских сред. Вопросы существования и единственности решений.

## **Дифференциальные уравнения и смежные вопросы анализа (семинар)**

Автор – д.ф.-м.н., профессор Белоносов В.С.

Семинар «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы анализа» был организован основателем кафедры Прикладной математики Т.И. Зеленьком, и уже много лет действует в ИМ СО РАН. Этот семинар – научно-исследовательский. В его работе участвуют как ведущие специалисты Института математики, так и сотрудники других институтов СО РАН и ВУЗов Новосибирска, занимающиеся вопросами анализа, дифференциальных уравнений и математическим моделированием.

На семинаре обсуждаются постановки задач, новые научные результаты участников, кандидатские и докторские диссертации, дипломные и курсовые работы студентов, а также реферируются наиболее интересные текущие научные публикации. Непременными участниками семинара, играющими заметную роль в его работе, всегда были студенты и аспиранты НГУ, многие из которых успешно закончили университет и аспирантуру, а теперь участвуют в работе семинара в качестве научных сотрудников. Основные научные направления:

- качественная теория дифференциальных уравнений;
- спектральная теория дифференциальных операторов;
- вариационное исчисление;
- математическое моделирование в механике, физике и химии;
- обратные задачи;
- теория приближений и численные методы;
- теория управления и оптимизация.

## **Движение жидкостей и газов в пористых средах (семинар)**

Автор – к.-ф.м.н., доцент Капранов Ю.И.

Постоянно работающий учебный семинар для студентов 3-4 курсов и магистрантов 1-го курса. Цель семинара – изучение математических моделей, применяемых для описания движения жидкостей и газов в пористых средах.

**Основная тематика** сообщений студентов-участников семинара:

- задачи фильтрации однородных жидкостей;
- влияние капиллярных сил, течения несмешивающихся жидкостей;
- моделирование физико-химического взаимодействия потока с пористой средой;
- задачи многофазной и многокомпонентной фильтрации;
- математический аппарат, пригодный для исследования возникающих при этом начально-краевых задач.

Участники сообщают на семинаре о результатах исследований по тематике своих курсовых/дипломных работ.

Семинар работает 1 раз в неделю, начиная со 2-ой половины 3-го курса, и продолжается до конца 1-го курса магистратуры.

Участие в работе семинара в последующем входит в оценку производственной практики студента.

## **Волны в неоднородных средах (семинар)**

Авторы – д.ф.-м.н., профессор Ляпидевский В.Ю., д.ф.-м.н., профессор Макаренко Н.И., к.ф.-м.н., доцент Сухинин С.В.

Введению в теорию детонации

1. Течение нереагирующей среды
2. Волны в реагирующих средах
3. Ударные волны и волны разрежения
4. Простейшие модели детонации
5. Структура бегущих волн
6. Устойчивость зоны реакции
7. Идеальная детонация Чепмена – Жуге
8. Структура детонационного фронта в газах
9. Детонация в гетерогенных средах
10. Пузырьковая детонация
11. Детонационные волны в гетерогенных системах специальной структуры

### **Литература**

1. У. Фиккетт, Введение в теорию детонации. М., Мир, 1989, 216 с.
2. Г. Курант, К. Фридрихс, Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Издательство иностранной литературы, 1950. - 426 с.
3. В.В. Митрофанов, Детонация гомогенных и гетерогенных систем, Новосибирск, 2003, с. 200.

# Курсы кафедры теории вероятностей и математической статистики

## Дополнительные главы теории вероятностей

Руководитель: Бакланов Евгений Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент ММФ НГУ.

Курс предназначен для подготовки специалистов, обладающих глубокими знаниями теории вероятностей и навыками использования этих знаний в дальнейшей исследовательской работе. Содержание курса охватывает основные разделы методов современной теории суммирования независимых случайных величин.

В курсе изучаются вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин: экспоненциальные неравенства, неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин, неравенства симметризации.

В частности, детально изучены неравенства Нагаева – Фука, в которых, в отличие от классических вероятностных неравенств, не предполагается существование у случайных величин конечных моментов тех или иных порядков.

Подробно рассмотрены моментные неравенства – неравенства Розенталя и его следствия.

Исследуется сходимость рядов независимых случайных величин, законы больших чисел. В частности, доказывается закон больших чисел Марцинкевича – Зигмунда.

Курс рассчитан на 2 семестра (68 ч. лекций). В конце обучения проводится промежуточная аттестация в форме дифференцированного зачета.

### Тематический план курса:

1. Неравенства Чебышева (2 часа).
2. Экспоненциальные неравенства Чебышева (2 часа).
3. Неравенства Йенсена, Гельдера, Минковского (2 часа).
4. Неравенства Петрова, Бернштейна (2 часа).
5. Неравенство Нагаева — Фука и его следствия (2 часа).
6. Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин (4 часа).
7. Неравенства Розенталя (2 часа).
8. Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин (2 часа).
9. Неравенства Леви (2 часа).
10. Неравенства Леви – Колмогорова (2 часа).
11. Неравенства Колмогорова для распределения максимума сумм независимых случайных величин (4 часа).
12. Неравенство Леви – Рогозина (2 часа).
13. Слабые неравенства симметризации (2 часа).
14. Сильные неравенства симметризации (2 часа).
15. Неравенство Колмогорова – оценка снизу для распределения максимума

- сумм ограниченных случайных величин (2 часа).
16. Лемма Бореля – Кантелли и ее следствия (2 часа).
  17. Виды сходимостей. Основные свойства (2 часа).
  18. Сходимость почти наверное (2 часа).
  19. Сходимость рядов независимых случайных величин (2 часа).
  20. Классический критерий Колмогорова сходимости рядов (2 часа).
  21. Необходимые и достаточные условия сходимости рядов случайных величин (2 часа).
  22. Общие условия сходимости рядов (критерий трех рядов) (2 часа).
  23. Усиленный закон больших чисел (2 часа).
  24. Необходимые и достаточные условия выполнения усиленного закона больших чисел для произвольных независимых случайных величин (2 часа).
  25. Усиленный закон больших чисел для одинаково распределенных случайных величин (2 часа).
  26. Усиленный закон больших чисел для симметричных случайных величин (2 часа).
  27. Усиленный закон больших чисел Марцинкевича – Зигмунда (4 часа).
  28. Оценки скорости сходимости в законах больших чисел (4 часа).
  29. Закон повторного логарифма (4 часа).

**Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.  
Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины**

Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы:

- Используя неравенство Нагаева – Фука, вывести верхнюю оценку для моментов сумм независимых случайных величин.
- Доказать необходимость конечности первого момента в усиленном законе больших чисел.
- Представление Леви для характеристических функций безгранично делимых законов.
- Пусть  $\xi$  и  $\eta$  – независимые одинаково распределенные случайные величины с конечной дисперсией. Доказать, что если  $\xi + \eta$  и  $\xi - \eta$  независимы, то  $\xi$  и  $\eta$  имеют нормальное распределение (возможно, вырожденное).
- Пусть случайная величина  $\xi$  имеет пуассоновское распределение с параметром  $\lambda$ . Доказать, что  $P(\xi \geq 2\lambda) \leq 1/\max(2, \lambda)$ .
- Пусть  $\{\xi_n\}$  – последовательность случайных величин. Доказать, что если ряд из вторых моментов этих величин сходится, то последовательность  $\{\xi_n\}$  сходится к нулю п.н.
- Выполнен ли ЗБЧ для последовательности независимых и одинаково распределенных с.в. из распределения Коши?

- Доказать выполнение ЗБЧ для последовательности слабозависимых случайных величин с равномерно ограниченными дисперсиями.
- Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин: неравенства Леви, Леви - Колмогорова.
- Оценки скорости сходимости в законах больших чисел.
- Доказать равномерную непрерывность произвольной характеристической функции.

### **Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

#### а) основная литература:

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Либроком, 2009, 656 с.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2005, 478 с.
3. Ширяев А. Н. Вероятность: В 2-х т. - М.: МЦНМО, 2004.
4. Н.С.Аркашов. Сборник задач и упражнений по математическим методам. Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 2010 г.

#### б) дополнительная литература:

9. Ламперти Дж. Вероятность. М.: Наука, 1973.
10. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
11. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.

## **Теория мартингалов**

Руководитель: Бакланов Евгений Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент ММФ НГУ.

Курс предназначен для подготовки специалистов, обладающих глубокими знаниями теории вероятностей и навыками использования этих знаний в дальнейшей исследовательской работе. Содержание курса охватывает основные разделы методов современной теории мартингалов и стохастического интегрирования.

В курсе изучаются основные неравенства и теоремы сходимости для мартингалов с дискретным и непрерывным временем, равномерно интегрируемые мартингалы. Подробно изучаются основные свойства броуновского движения. Вводится понятие стохастического интеграла, детально рассматриваются его свойства. Выводится основная формула стохастического интегрирования - формула Ито. Изучаются стохастические дифференциальные уравнения.

Курс рассчитан на 2 семестра (68 ч. лекций). В конце обучения проводится промежуточная аттестация в форме дифференцированного зачета.

### Тематический план курса:

1. Условные математические ожидания (2 часа).
2. Основные неравенства для условных математических ожиданий (2 часа).
3. Теоремы Лебега и Фату для условных математических ожиданий (2 часа).
4. Мартингалы: дискретное время. Определения и основные свойства (2 часа).
5. Мартингалы: дискретное время. Основные неравенства (2 часа).
6. Мартингалы: дискретное время. Теоремы сходимости (2 часа).
7. Мартингалы: дискретное время. Равномерно интегрируемые мартингалы (2 часа).
8. Мартингалы: дискретное время. Моменты остановки (2 часа).
9. Мартингалы: непрерывное время. Определения и основные свойства (2 часа).
10. Мартингалы: непрерывное время. Основные неравенства (2 часа).
11. Мартингалы: непрерывное время. Теоремы сходимости (2 часа).
12. Мартингалы: непрерывное время. Равномерно интегрируемые мартингалы (2 часа).
13. Мартингалы: непрерывное время. Моменты остановки (2 часа).
14. Неравенства Дуба (2 часа).
15. Моментные неравенства для мартингалов (2 часа).
16. Гауссовские процессы. Определения и основные свойства (2 часа).
17. Броуновское движение: основные свойства (2 часа).
18. Явное задание броуновского движения (2 часа).
19. Броуновское движение: свойства траекторий (2 часа).
20. Броуновское движение: дифференцируемость траекторий (2 часа).
21. Броуновское движение: марковское свойство (2 часа).
22. Броуновское движение: строго марковское свойство (2 часа).

23. Броуновское движение: закон повторного логарифма (4 часа).
24. Стохастический интеграл. Определение и элементарные свойства (2 часа).
25. Стохастический интеграл. Разные способы построения (2 часа).
26. Стохастический интеграл. Основные теоремы (2 часа).
27. Введение в теорию стохастического интегрирования (2 часа).
28. Стохастический интеграл по броуновскому движению (2 часа).
29. Формула Ито. Предварительные сведения (2 часа).
30. Формула Ито для простых функций (2 часа).
31. Формула Ито. Доказательство в общем случае (2 часа).
32. Стохастические дифференциальные уравнения (2 часа).
33. Стохастические дифференциальные уравнения: примеры применения (2 часа).

### **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.**

Перечень примерных контрольных вопросов:

1. Условные математические ожидания: определение и основные свойства.
2. Вывести аналог неравенства Чебышева для мартингалов с дискретным временем.
3. Привести достаточные и необходимые условия равномерной интегрируемости.
4. Привести пример не равномерно интегрируемого мартингала.
5. Основные теоремы сходимости мартингалов.
6. Определение и основные свойства гауссовских процессов.
7. Броуновское движение: основные свойства.
8. Марковское свойство броуновского движения.
9. Строго марковское свойство броуновского движения.
10. Определение и основные свойства стохастического интеграла.
11. Доказательство формулы Ито.

### **Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

а) основная литература:

- Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Либроком, 2009, 656 с.
- Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003.
- Ширяев А. Н. Вероятность: В 2-х т. - М.: МЦНМО, 2004.

б) дополнительная литература:

1. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.
2. Жакод Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. М.: Физматлит, 1994.
3. Kallenberg, O. Foundations of Modern Probability. Springer-Verlag, New York, 1997.
4. Ламперти Дж. Вероятность. М.: Наука, 1973.
5. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука,

1977.

6. Мейер П. А. Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973.

## **Интегро-локальные теоремы и большие уклонения**

Руководитель: профессор А.А.Могульский

Специальный курс «Интегро-локальные теоремы и большие уклонения» предназначен для углубленного изучения предельных теорем теории вероятностей. Основной целью освоения курса является овладение методами доказательства основных предельных теорем современной теории вероятностей.

Для достижения поставленной цели выделяются задачи курса:

- 1) изучение теоретической части курса в соответствии с программой
- 2) решение задач по курсу в соответствии с программой
- 3) сдача экзамена в соответствии с учебным планом.

По окончании изучения указанной дисциплины студент должен

- иметь представление о месте и роли изучаемой дисциплины среди других наук;
- знать содержание программы курса;
- уметь использовать различные методы исследования асимптотического поведения распределений сумм независимых случайных величин.

Курс рассчитан на 2 семестра, 64 часа лекций. Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрен экзамен. В течение учебного семестра студенты самостоятельно решают задачи и упражнения.

### Тематический план курса:

- Введение
- Предварительные сведения.
- Условия невырожденности, решетчатости, нерешетчатости, арифметичности.
- Равенство Парсевала. Теорема обращения в случае, когда характеристическая функция абсолютно интегрируема.
- Теорема обращения в случае, когда квадрат характеристической функции абсолютно интегрируем.
- Теорема обращения в арифметическом случае.
- Теорема Римана – Лебега.
- Интегро-локальная теорема в нерешетчатом случае (формулировка).
- Сглаживание в нерешетчатом случае.
- Оценивание вероятности попасть в куб исходной суммы вероятностью этого же события для сглаженной суммы.
- Доказательство интегро-локальной теоремы в нерешетчатом случае.
- Интегро-локальная теорема в арифметическом случае (формулировка).
- Доказательство интегро-локальной теоремы в арифметическом случае.
- Интегро-локальные теоремы для схемы серий (в нерешетчатом и арифметическом случаях).
- Принцип больших уклонений (в произвольном метрическом пространстве).

- Функция уклонений, ее свойства.
- Принцип больших уклонений для ломанных, построенных по суммам независимых одинаково распределенных случайных величин.

### **Учебно-методическое обеспечение дисциплины**

В экзаменационный билет входит один вопрос по программе курса и одна задача. Ниже приводятся образцы экзаменационных вопросов.

1. Теорема обращения в арифметическом случае.
2. Доказательство интегро-локальной теоремы в нерешетчатом случае.
3. Теорема обращения в случае, когда характеристическая функция абсолютно интегрируема.

### **Список основной и дополнительной литературы.**

1. Gnedenko, B.V. (1954) On a local limit theorem for identically distributed independent summands // Woss. Z. Humbold-Univ. Berlin. Math.-Nat. Reihe 3, 287-293.
2. Gnedenko, B.V. and Kolmogorov A.N. (1954) Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables. Addison-Wesley, Cambridge. (English translation).
3. Rvacheva, E.L. On domains of attraction of multi-dimensional distributions // Gos.Univ. Uchen. Zap. Ser. Meh-Mat. (1958), pp. 5-44 (Selected Translations in Math. Stat. and Prob. Theory, V.2 (1962), 183-205).
4. Shepp, L.A. (1964) A local limit theorem // Ann. Math. Statist. 35, 419-423.
5. Stone C.J. Local limit theorems for asymptotically stable distributions // Notices Amer. Math. Soc., Vol.11, (1964), p.465.
6. Stone C. On local and ratio limit theorems // Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1966, Vol.II, Part II, pp. 217—224.
7. Бхаттачария Р.Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения – М.:Наука,– 1982.– 286с.
8. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин // М. Наука, 1972.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.Т.II.– М.: Мир, 1967.– 725 с.
10. Боровков А.А. Теория вероятностей.– 3-е изд., перераб. и доп.– М.: Эдиториал УРСС; Новосибирск: Из-во ИМ СО РАН, 1999.– 470 с.
11. Боровков А.А., Могульский А.А. Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие уклонения. I, II. // Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43, N1. С.3–17; 2000. Т. 45, N1. С.5–19.

## Дополнительные главы теории случайных процессов

Руководитель: д.ф.-м.н., доцент Д.А.Коршунов

### Содержание курса:

- Определение случайного процесса. Стохастически эквивалентные процессы. Цилиндрическая  $\sigma$ -алгебра. Выборочное вероятностное пространство.
- Условие согласования семейства мер. Теорема Колмогорова о согласованных распределениях.
- Некоторые классы случайных процессов. Стационарные процессы. Независимость приращений. Виды непрерывности.
- Критерий Колмогорова существования непрерывной модификации процесса.
- Свойства однородных процессов с независимыми приращениями.
- Винеровский процесс и его свойства.
- Пуассоновский процесс и его свойства. Совместное распределение моментов скачков пуассоновского процесса.
- Гауссовские процессы. Ковариационная функция.
- Система дифференциальных уравнений Колмогорова. Сходимость процесса блуждания частицы на множестве целых чисел к винеровскому процессу.
- Линейная теория случайных процессов в  $L^2$ , основные определения. Критерий непрерывности процесса.
- Дифференцирование процессов в  $L^2$ . Интеграл Римана в  $L^2$ .
- Стохастический интеграл от неслучайной функции. Элементарная ортогональная стохастическая мера.
- Стационарные процессы. Ковариационная функция. Её спектральное представление.
- Спектральное представление стационарной последовательности.
- Вполне детерминированные последовательности. Вполне недетерминированные последовательности.
- Представление стационарной последовательности в виде суммы вполне детерминированной и вполне недетерминированной последовательностей.
- Общий вид вполне недетерминированных последовательностей. Прогноз вполне недетерминированных последовательностей (метод Винера).
- Цепи Маркова с дискретным временем. Матричная запись вероятностей перехода.
- Эргодическая теорема для цепей Маркова со счетным числом состояний. Эргодическая теорема для регулярных цепей с конечным числом состояний.
- Существенные и несущественные состояния. Вероятность пребывания на множестве несущественных состояний.

- Разложение цепи Маркова на классы сообщающихся состояний. Теорема солидарности.
- Эргодическая теорема для конечной неразложимой непериодической цепи.
- Возвратность состояний. Теоремы солидарности для возвратных состояний.
- Примеры случайных блужданий: простейшее случайное блуждание, симметричное блуждание на множестве целых чисел, симметричное непрерывное блуждание в  $\mathbf{Z}^d$ . Возвратность этих цепей.
- Эргодическая теорема для счетных цепей с конечным средним временем возвращения в какое-либо состояние (без доказательства). Достаточное условие эргодичности в терминах среднего сноса.
- Элементарная теория массового обслуживания. Поток событий. Свойства потока: стационарность, ординарность, отсутствие последствия. Дифференциальное уравнение простейшего потока. Интенсивность и параметр потока.
- Системы обслуживания с ожиданием. Марковское свойство процесса обслуживания.
- Стационарное решение системы дифференциальных уравнений системы обслуживания. Распределение длительности ожидания обслуживания в стационарном режиме.
- Анализ системы обслуживания в условиях большой нагрузки. Теорема о длине очереди.
- Простейшие нестационарные потоки. Существование параметра общего стационарного потока.

Курс рассчитан на 2 семестра, 64 часа лекций. Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрен экзамен.

### **Образцы вопросов для подготовки к экзамену**

В экзаменационный билет входят два теоретических вопроса и одна задача. Ниже приводятся образцы экзаменационных вопросов (2 вопроса по теории и одна задача).

1. Эргодичность счетной цепи Маркова в терминах среднего сноса.
2. Спектральное представление стационарной последовательности.
3. Получить дифференциальные уравнения и их стационарное решение для  $m$ -канальной системы с потерями. (Если вызов поступает и не находит свободных приборов, то он покидает систему.)

### **Список основной и дополнительной литературы.**

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
2. Розанов Ю. А. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1982.
3. Юринский В.В. Случайные процессы. Новосибирск. НГУ, 1987.
4. И.И.Гихман, А.В.Скорород. Введение в теорию случайных процессов. М: Наука, 1977.



## **Случайные блуждания с тяжелыми хвостами**

Руководитель: д.ф.-м.н., доцент Д.А.Коршунов

Курс предназначен для подготовки специалистов, обладающих углубленными знаниями теории вероятностей в области случайных блужданий и навыками использования этих знаний в дальнейшей исследовательской работе.

Содержание курса охватывает основные разделы теории случайных блужданий: модели теории страхования и теории массового обслуживания, приводящие к задачам исследования случайных блужданий, предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, теория восстановления, лестничная структура максимума случайного блуждания, теория субэкспоненциальных распределений и теория больших уклонений в случае тяжелых хвостов распределений.

Курс рассчитан на 1 семестра, 36 часа лекций. Для контроля усвоения дисциплины учебным планом предусмотрен экзамен.

### Тематический план курса:

1. Основные типы случайных блужданий. Наиболее распространённые приложения: одноканальная система обслуживания и модель Спарре - Андерсона в теории страхования (2 часа).
2. Усиленный закон больших чисел, максимум случайного блуждания (2 часа).
3. Характеристические функции, критерий слабой сходимости. Центральная предельная теорема (2 часа).
4. Формула обращения для решетчатых распределений. Локальная предельная теорема для свёрток решётчатых распределений (2 часа).
5. Формула обращения для плотностей. Локальная предельная теорема для свёрток абсолютно непрерывных распределений (2 часа).
6. Операция сглаживания распределений. Интегро-локальная предельная теорема для сумм (2 часа).
7. Вопросы возвратности и невозвратности случайных блужданий (2 часа).
8. Процесс восстановления, основные свойства. ЗБЧ и ЦПТ для процесса восстановления (2 часа).
9. Интегральная теорема восстановления (2 часа).
10. Локальная теорема восстановления. Уравнение восстановления (2 часа).
11. Лестничная структура случайного блуждания. Лемма двойственности (2 часа).
12. Распределение лестничных высот. Распределение лестничных моментов (2 часа).
13. Асимптотическое поведение распределения первой положительной лестничной высоты для распределений с длинными хвостами (2 часа).
14. Нижние пределы для хвостов сверток распределений (2 часа).
15. Субэкспоненциальные распределения и их свойства (2 часа).
16. Оценка Кестена для сверток субэкспоненциального распределения (2 часа).

17. Асимптотика распределения суммы, остановленной в случайный момент времени (2 часа).
18. Асимптотика распределения максимума случайного блуждания в случае тяжёлых хвостов (2 часа).

### **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.**

Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы:

- Доказать многомерную центральную предельную теорему.
- Доказать многомерную локальную центральную предельную теорему в решетчатом случае.
- Исследовать многомерное случайное блуждание на возвратность в зависимости от размерности пространства.
- Изучить самостоятельно доказательство основной теоремы восстановления для распределений на всей оси.
- Изучить самостоятельно свойства правильно меняющихся функций.

Варианты экзаменационных вопросов:

1. Характеристические функции, критерий слабой сходимости.
2. Формула обращения для решетчатых распределений. Локальная предельная теорема для свёрток решётчатых распределений.
3. Критерий возвратности и невозвратности случайных блужданий.
4. ЗБЧ и ЦПТ для процесса восстановления.
5. Интегральная теорема восстановления.
6. Асимптотическое поведение распределения первой положительной лестничной высоты для распределений с длинными хвостами.
7. Субэкспоненциальные распределения и их свойства.
8. Оценка Кестена для свёрток субэкспоненциального распределения.
9. Асимптотика распределения максимума случайного блуждания в случае тяжёлых хвостов.

### **Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

- Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Либроком, 2009, 656 с.
- Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2005, 478 с.
- Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Либроком, Т.2, 2010, 754 с.
- Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosch T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. 4<sup>th</sup> Ed. Berlin: Springer, 2003, 648 p.
- Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular variation. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

## **Финансовая математика**

Руководитель: Бакланов Евгений Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент ММФ НГУ.

Финансовая математика является разделом математики, предназначенным для анализа финансовых структур, работающих в условиях неопределенности, и поиска наиболее рациональных способов управления финансовыми институтами и средствами с учетом таких факторов, как время, риск, стохастическая эволюция и т.д.

Основной целью финансовой математики является предоставление адекватных инструментов оценки рисков, с учетом вероятностного характера рыночных условий. В стохастической финансовой математике важная роль отведена критериям для оценки рисков, в том числе адекватной оценке финансовых инструментов.

Финансовые рынки являются основным объектом финансовой математики, опирающейся на такие вероятностные и статистические дисциплины, как случайные процессы, статистику случайных процессов, теорию мартингалов, стохастический анализ и т.д.

Курс читается 2 семестра и включает в себя 72 часа лекций. В конце курса предусмотрен письменный экзамен.

### **Содержание курса**

Курс состоит из четырех глав. В первой главе представлены основные принципы и задачи финансовой математики. Во второй главе изучается модель стохастического ценообразования. В частности, здесь будут рассмотрены классические опционы: европейский опцион, азиатский опцион, опцион «Lookback». Третья глава представляет собой введение в стохастическое исчисление. В частности, в третьей главе мы изучаем интеграл Ито - главный инструмент стохастического исчисления.

В четвертой главе мы рассмотрим расчет стоимости активов в непрерывном случае и подробно исследуем модель Блэка-Шоулза.

### **1. Основные понятия и задачи финансовой математики**

Предмет финансовой математики. Примеры договоров. Арбитраж. Хеджирование. Оптимальные инвестиционные цены платежных обязательств. Условные матожидания: определение, существование и единственность, основные свойства.

Мартингалы: дискретное и непрерывное время. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Определения и основные свойства. Примеры. Разложение Дуба. Моменты останова. Основные неравенства. Предельные теоремы. Равномерно интегрируемые мартингалы. Дискретная версия стохастического интеграла.  $(B,S)$  - рынок и инвестиционный портфель. Условия самофинансирования. Дисконтирование. Первая и вторая основные теоремы финансовой математики. Неполные рынки. Верхняя цена хеджирования.

### **2. Стохастические модели ценообразования**

Понятие отсутствия арбитража на рынке. Модель ценообразования финансовых активов. Теория ценообразования. Арбитраж. Расчет арбитража (справедливой) стоимости классических опционов: европейский опцион, азиатский опцион, «Lookback». Задача оптимального инвестирования: мартингальный подход. Американский опцион. Супермартингальная характеристика стоимости. Оптимальное время выполнения американского опциона.

### **3. Введение в стохастическое исчисление**

Броуновское движение (винеровский процесс): определение и основные свойства. Построение непрерывного броуновского движения. Свойства траекторий. Квадратичная вариация броуновского движения. Распределение максимума броуновского движения. Геометрическое броуновское движение. Построение стохастического интеграла Ито. Свойства стохастического интеграла. Формула замены переменной. Процесс Ито. Квадратичная вариация интеграла Ито и процесса Ито. Броуновский мост. Представление геометрического броуновского движения как процесса Ито. Стохастические дифференциальные уравнения. Слабые и сильные решения.

### **4. Расчет стоимости производных финансовых инструментов в непрерывном случае**

Модель Блэка-Шоулза. Уравнение Блэка-Шоулза и ее решение. Формула Блэка-Шоулза как предельный случай дискретной формулы Кокса-Росса - Рубинштейна. Формула Блэка-Шоулза как решение стохастического дифференциального уравнения с граничными условиями для европейских опционов. Теорема Гирсанова для броуновского движения. Риск-нейтральная мера и теорема Гирсанова в общем случае. Вывод уравнения Блэка-Шоулза с помощью теоремы Гирсанова.

Азиатские опционы, опцион «Lookback». Неравенства, связывающие опционы европейского и американского типов.

### **Список литературы**

1. *Shiryaev A. N.* Probability. New York, NY: Springer-Verlag, 1995.
2. *Shiryaev A. N.* Stochastic financial mathematics, 2002.
3. *Oksendal B.* Stochastic Differential Equations, New York, NY: Springer-Verlag, 2003.
4. *Baxter M. W., Rennie A J. O.* Financial Calculus. An introduction to derivative pricing. Cambridge University Press, Cambridge 2001.
5. *Brzeźniak Z., Zastawniak T. J.* Basic Stochastic Processes: A Course Through Exercises. Springer, 1999.
6. *Shreve S.* Stochastic Calculus for Finance I, II. Springer, 2004.
7. *Steele M.* Stochastic Calculus and Financial Applications. Springer, 2001.

# Курсы кафедры теории функций

## **Квазиконформные и квазисимметрические отображения**

Руководитель: д.ф.-м.н., профессор В.В. Асеев

Курс рассчитан на студентов 3-4 курсов механико-математического факультета НГУ, обучающихся по направлениям математика и математика и компьютерные науки.

Курс ставит своей целью познакомить студентов с аппаратом геометрической теории функций и её применении к теории римановых поверхностей, гиперболических многообразий и теории фракталов. Важное место в курсе занимает теория мебиусовых отображений и их метрических аналогов. Это позволяет перенести классические теоремы из комплексного анализа на произвольные метрические пространства.

Курс рассчитан на 2 семестра и включает 60 часов лекционных занятий.

### Содержание курса:

- Сингулярное разложение матрицы линейного преобразования. Главные растяжения и отклонения линейного преобразования. Основные свойства и техника вычисления главных растяжений и отклонений. Свойство полумультимпликативности отклонений.
- Определение коэффициентов квазиконформности диффеоморфизмов.
- Квазиконформные отображения на плоскости.
- Стереографическая проекция и мебиусовы преобразования. Теорема Лиувилля о конформных преобразованиях в пространстве размерности больше двух. Задача Альфорса-Берлинга о продолжении гомеоморфизма вещественной оси до квазиконформного автоморфизма верхней полуплоскости. Определение квазисимметрической функции по Келингосу.
- Метрическое определение квазиконформности для гомеоморфизмов пространственных областей (по Маркушевичу-Песину) и его геометрический смысл.
- Абсолютно непрерывные функции одной переменной. Абсолютно непрерывные вектор-функции. Определение класса АСТ функций и отображений, абсолютно непрерывных по Тонелли. Определение функций классов  $ACL$  и  $ACL_n$ . Дифференциальные свойства функций и отображений класса  $ACL_n$  пространственных областей. Аналитическое определение квазиконформности пространственного отображения.
- Теорема об эквивалентности метрического и аналитического определений квазиконформности. Основные свойства квазиконформных отображений (теоремы сходимости и компактности).
- Понятие модуля семейства кривых. Понятие пространственного конденсатора и его конформной емкости. Теорема Шлыка о совпадении емкости конденсатора и модуля семейства кривых, соединяющих его пластины. Свойство квазиинвариантности емкости конденсатора.

- Геометрическое определение квазиконформности гомеоморфизма пространственных областей. Теорема об эквивалентности геометрического и аналитического определений квазиконформности.
- Примеры на вычисление конформной емкости конденсаторов. Основные свойства конформной емкости. Симметризация конденсаторов (упрощенная схема) и основная теорема о симметризации. Лемма Вайсяля. Экстремальный конденсатор Тейхмюллера и функция Тейхмюллера. Их использование для получения нижних оценок конформной емкости конденсаторов со связными пластинами.
- Квазисимметрические отображения метрических пространств. Элементарные свойства квазисимметрических отображений. Связь квазисимметрических и квазиконформных отображений пространства  $\mathbb{R}^n$ ; взаимные оценки функции искажения и коэффициентов квазиконформности.
- Теорема Вуоринена об асимптотически точной оценке функции искажения через коэффициент квазиконформности, не зависящей от размерности пространства.
- Абсолютное двойное отношение тетрад в метрическом пространстве. Мебиуова инвариантность абсолютного двойного отношения. Геометрические критерии мебиусовости в терминах абсолютного двойного отношения.
- Квазимебиусовы отображения метрических пространств. Их связь с квазисимметрическими и квазиконформными отображениями. Локализация классов квазисимметрических и квазимебиусовых отображений.
- Совпадение понятий квазиконформности отображения области в  $\mathbb{R}^n$  и локальной квазимебиусовости с единой функцией искажения.
- Графическая сходимость отображений. Основная теорема сходимости последовательностей  $\omega$ -квазимебиусовых вложений с компактными носителями. Нормальные и компактные семейства топологических вложений метрических пространств. Основная теорема об  $\omega$ -квазимебиусовости любого нормального мебиусово инвариантного семейства топологических вложений.
- Постановка задачи о продолжении квазимебиусова отображения компакта в  $\mathbb{R}^n$  до квазиконформного автоморфизма всего пространства. Критерий Рикмана продолжения квазимебиусова гомеоморфизма границ плоских жордановых областей до квазиконформного отображения этих областей.
- Кривые и дуги с ограниченным искривлением. Теорема Тукиа-Вайсяля о квазисимметрическом распрямлении дуги с ограниченным искривлением.
- Задача Тейхмюллера о квазиконформном продолжении отображения тетрады на плоскости в заданном гомотопическом классе отображений. Понятие квазиконформной выпуклости жордановой области по Асееву. Теорема Асеева о квазиконформном продолжении квазимебиусова гомеоморфизма плоской квазиконформно выпуклой области.
- Теорема Варисова о квазиконформном продолжении квазимебиусова

отображения с плоского криволинейного многоугольника, стороны которого имеют ограниченное искривление.

- Проблемы квазиконформного продолжения  $\omega$ -квазимебиусовых вложений с семейства областей.
- Обзор дальнейших направлений развития общей теории отображений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белинский П.П.: Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974.
2. Сычев А.В.: Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983.
3. Решетняк Ю.Г.: Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
4. Альфорс Л.: Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.
5. Асеев В.В.: Квазисимметрические вложения. Итоги науки и техники, сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Том 75, Комплексный анализ и теория представлений - 3. М.: ВИНТИ, 2000.
6. Асеев В.В.: Квазиконформные отображения и емкости конденсаторов: учебно-методическое пособие. Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2009, 80 с.
7. Lehto O., Virtanen K. I.: Quasiconformal mappings in the plane. Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Vol. 126, Second ed., Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1973.
8. Väisälä J.: Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Lect. Notes in Math., Vol. 229, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg - New York, 1971.
9. Heinonen J.: Lectures on analysis on metric spaces. Universitext, Springer-Verlag New York- Berlin- Heidelberg, 2001.
10. Vuorinen M.: Conformal geometry and quasiregular mappings. Lect. Notes in Math., Vol. 1319, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg- New York - London – Paris - Tokyo, 1999, 209 pp.

## Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач.

Автор: д.ф.-м.н., профессор С.И. Кабанихин.

Курс рассчитан на студентов 3-4 курсов механико-математического факультета НГУ, обучающихся по направлениям математика и математика и компьютерные науки.

Курс ставит своей целью познакомить студентов с аппаратом геометрической теории функций и её применении к теории римановых поверхностей, гиперболических многообразий и теории фракталов. Важное место в курсе занимают теоремы существования и единственности решения прямой и обратной задачи для уравнения математической физики. Особое внимание уделено вычисление градиента целевого функционала для обратной задачи для уравнения колебаний струны. Детально объясняется метод обращения разностных схем.

Курс рассчитан на 2 семестра и включает 60 часов лекционных занятий.

### Содержание курса:

- Корректные, некорректные и условно-корректные задачи. Множество корректности. Условная устойчивость.
- Примеры некорректных задач - дифференцирование, задача Коши для уравнения Лапласа, задача для уравнения теплопроводности с обратным временем, интегральные уравнения первого рода, операторные уравнения  $Aq=f$  с компактным оператором  $A$ . Томография.
- Методы регуляризации А.Н. Тихонова и М.М. Лаврентьева. Дискретная и итеративная регуляризация.
- Теорема о непрерывности обратного оператора. Квазирешение. Теорема В.К. Иванова.
- Теорема о сингулярном разложении матриц. Метод С.К. Годунова регуляризации систем линейных алгебраических уравнений.
- Теорема Гильберта-Шмидта.
- Компактные операторы в сепарабельных гильбертовых пространствах и их свойства. Сингулярное разложение компактного оператора. Операторное уравнение первого рода  $Aq=f$ . Критерий разрешимости Пикара.
- Производная Фреше. Целевой функционал  $J(q) = \langle Aq-f, Aq-f \rangle$  и его градиент  $J'q$ . Выражение для градиента  $J'q = 2[A'q]^*(Aq-f)$ .
- Условия единственности стационарной точки целевого функционала.
- Прямая и обратная задача для уравнения колебаний струны. Теоремы существования и единственности решения прямой и обратной задачи для уравнения колебаний струны. Вычисление градиента целевого функционала для обратной задачи для уравнения колебаний струны. Метод обращения разностной схемы.
- Обратная задача акустики и методы ее решения.
- Сходимость по функционалу метода простой итерации и метода наискорейшего спуска. Оценка скорости сходимости по функционалу

метода простой итерации и метода наискорейшего спуска.

- Модуль непрерывности обратного оператора и оценка условной устойчивости.
- Задача Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем. Оценка условной устойчивости.
- Задача Коши для уравнения Лапласа. Оценка условной устойчивости.
- Сильная сходимость метода наискорейшего спуска.
- Метод линеаризации.
- Метод Ньютона-Канторовича.
- Метод Гельфанда-Левитана-Крейна.

#### **ЛИТЕРАТУРА К СПЕЦКУРСУ**

1. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Сибирское научное издательство, 2009.
2. М.М. Лаврентьев и Л.Я. Савельев. Теория операторов и некорректные задачи. ИМ СО РАН, 1999.

## **Теория узлов и зацеплений. Гиперболические многообразия**

Автор: д.ф.-м.н., профессор Медных А.Д.

Курс рассчитан на студентов 3-4 курсов механико-математического факультета НГУ, обучающихся по направлениям математика и математика и компьютерные науки.

Курс ставит своей целью усвоение студентами понятий, связанных с теорией римановых поверхностей, трехмерных гиперболических многообразий и с теорией орбифолдов, частным случаем которых является геометрическая теория узлов и зацеплений.

Данный курс знакомит студентов с основами теории гиперболических многообразий размерности 2 и 3. При этом, все определения даются, как минимум, на трех языках: теории функций, теории дискретных групп и римановой геометрии. Отмечаются тесные взаимосвязи между указанными подходами. Для установления результатов теории используется несколько основных методов. Во-первых, таковыми методами являются фундаментальные теоремы из классического и многомерного комплексного анализа, описывающие структуру комплексных и вещественно аналитических многообразий. Во-вторых, необходимы глубокие результаты из теории дискретных групп, описывающие строение групп изометрий на плоскости и в пространстве Лобачевского. И в-третьих, существенную роль оказывают топологические теоремы, классифицирующие трехмерные многообразия по типам существующих на них геометрий. Значительное внимание уделяется эффективной практике применения современных компьютеров и современных компьютерных программ для вычисления основных геометрических инвариантов указанных многообразий.

Курс рассчитан на 2 семестра и включает 60 часов лекционных занятий.

### Содержание курса:

1. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА УЗЛА
  - 1.1. Представление Вертингера фундаментальной группы узла
  - 1.2. Геометрические структуры на узлах и зацеплениях
  - 1.3. Геометрические структуры на узлах с мостами и графах
2. ТРЕХМЕРНЫЕ ГЕОМЕТРИИ ТЕРСТОНА И ТЕОРИЯ УЗЛОВ
  - 2.1. Гиперболическая геометрия на узлах
  - 2.2. Сферическая геометрия на узлах
  - 2.3. Евклидова геометрия на узлах
  - 2.4. Фундаментальные множества узлов и зацеплений в пространствах постоянной кривизны
  - 2.5. Тригонометрия узлов и зацеплений
  - 2.6. Торические узлы и зацепления
  - 2.7. Классификация двухмостовых узлов и зацеплений
  - 2.8. Узлы и зацепления в других трехмерных геометриях
3. ОБЪЕМЫ КОНИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ НА УЗЛАХ И ЗАЦЕПЛЕНИЯХ

- 3.1. Гиперболические, сферические и евклидовы объемы
- 3.2. Зацепление Хопфа
- 3.3. Узел Трехлистник
- 3.4. Узел Восьмерка
- 3.5. Эллиптические орбиболды
- 3.6. Зацепление Уайтхеда
- 3.7. Гиперболическая геометрия
- 3.8. Зацепление Борромеевы кольца

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. Riley, An elliptical path from parabolic representations to hyperbolic structure. // *Topology of Low-Dimension manifolds*, LNM, 722, Springer-Verlag, 1979. -- P. 99—133.
2. R. Kellerhals, On the volume of hyperbolic polyhedra. // *Math. Ann.*, 285, 1989. -- P. 541—569.
3. Э. Б. Винберг, Геометрия--2. // *Итоги науки и техн. ВИНТИ. Современ. пробл. матем. Фундам. направления*, том 29, 1988.
4. C. D. Hodgson, Schlafli revisited: Variation of volume in constant curvature spaces. // Preprint.
5. А. Д. Медных, М. Г. Пашкевич, Элементарные формулы для гиперболического тетраэдра. // *Сиб. матем. журн.*, 47 (4), 2006, -- С. 831—841.
6. J. Milnor, Hyperbolic geometry: the first 150 years. // *Bull. Amer. Math. Soc.*, 6 (1), 1982, -- P. 9—24.
7. Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, М. Г. Пашкевич, Объем симметричного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах. // *Сиб. матем. журн.*, 45 (5), 2004, -- С. 1022—1031.
8. П. Скотт, Геометрии на трехмерных многообразиях, М.: Мир, 1986, 168 с.
9. У. Терстон, Трехмерная геометрия и топология, Изд-во. МЦНМО, 2001, 310 с.